鞅分析及其应用

胡必锦　朱自清



华中科技大学出版社
(华中理工大学出版社)

图书在版编目(CIP)数据

鞅分析及其应用/胡必锦 朱自清
武汉:华中科技大学出版社, 2001年1月
ISBN 7-5609-1999-5

Ⅰ. 鞅…
Ⅱ. ①胡… ②朱…
Ⅲ. 鞅分析-高等学校-教材
Ⅳ. O211.6

鞅分析及其应用 胡必锦 朱自清

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:张 欣 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印 刷:华中科技大学出版社印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:5.875 字数:136 000
版次:2001年1月第1版 印次:2001年1月第1次印刷 印数:1—1 200
ISBN 7-5609-1999-5/O·211 定价:12.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前　言

鞅论是概率论的重要分支，它是建立随机微积分学的主要基础之一，同时它本身就具有广泛的应用，在数量经济学、最优决策论、随机最优控制、随机最优滤波、分布参数估计等领域中鞅分析的应用极大地促进了这些学科的发展．本书介绍的鞅分析属经典鞅论，目的在于为那些有一定自学能力而又需要鞅分析知识的科技工作者以及工科院校的研究生和高年级学生提供一种人门性的参考材料，并力求适应那些手边缺乏资料的读者能够顺利地阅读本书的内容．我们在编写过程中尽可能讲清概念的来龙去脉，对于那些比较重要的结论和结果尽可能给出完整的证明．

本书共分七章，第一～六章由胡必锦编写，第七章由朱自清编写，第一～三章介绍必须的基础知识，第四～五章介绍半鞅，第七章介绍鞅论的某些应用．

本书编写过程中考虑各个方面的需要，因此，在材料的选择和连接等方面难免错漏，敬请专家和读者批评指正．

作者

1999 年 11 月

第一章　σ-代数

§1　定义和例

定义 1.1.1　设 Ω 为一基本事件空间．$\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个非空子集类．若

(i) $\forall A\in\mathscr{A}$，有 $A^c=\Omega\setminus A\in\mathscr{A}$；

(ii) $\forall A_i\in\mathscr{A}(i=1,2)$，有 $A_1\cup A_2\in\mathscr{A}$；

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个代数．

若将(ii)改为

(iii) $\forall A_i\in\mathscr{A}, i=1,2,\cdots$，有 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个 σ-代数．

注 1　在上面的定义中，"$\mathscr{A}$ 非空"可以代之以"$\Omega\in\mathscr{A}$"或"$\varnothing\in\mathscr{A}$"或"$A_0\in\mathscr{A}$"($A_0$ 为 Ω 某个子集)．

注 2　σ-代数必封闭于可数交运算，即若 $A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$．这是因为

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^c\in\mathscr{A}.$$

例 1.1.1　设 $\mathscr{A}=\{\varnothing,A,A^c,\Omega\}$，其中 $A\in\Omega$，则 $\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数．

显然对 $\mathscr{A}$，条件(i)、(ii)或(iii)均成立．这表明若一个代数只有有限个元素，则它同时也是一个 σ-代数．

例 1.1.2　设 $A_0=\varnothing, A_i\subset\Omega, i=1,2,\cdots, A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，则

$$\mathscr{A}=\{A: A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{k_i}, k_i\in\mathbf{N}\}$$

为一个 σ-代数，其中 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

σ-代数理论在概率论、过程论及随机微(积)分学中经常被涉及到．因此，了解 σ-代数的结构特征是很有必要的. 从定义 1.1.1 中可以看出，代数的结构比 σ-代数的结构简单．

定义 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 中的一个子集类，记

$$G=\{\mathscr{G}:\mathscr{A}\subset\mathscr{G},\mathscr{G}\text{ 为 }\Omega\text{ 上的 }\sigma\text{-代数}\}.$$

令

$$\sigma(\mathscr{A})=\bigcap\mathscr{G},\text{其中 }\mathscr{G}\in G,$$

则称 $\sigma(\mathscr{A})$ 为 Ω 上包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数．

例如，在例 1.1.1 中的 σ-代数 $\mathscr{A}$ 就可以看成是由只具有一个元素 A 的集类产生的 σ-代数．

在 σ-代数的结构中，单调性是重要的特征之一．

定义 1.1.3 设 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一个非空子集类．若对 $\mathscr{A}$ 中的任意单调序列 $\{A_n,n\geqslant 1\}$，即 $A_n\subseteq A_{n+1}$ 或 $A_n\supseteq A_{n+1}(n\geqslant 1)$，有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A\in\mathscr{A},$$

则称 $\mathscr{A}$ 为一个单调类．

例 1.1.3 设 $A_n\subset\Omega,\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A$，且 $A_n\neq A,n=1,2,\cdots$ 则集类 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 不是一个单调类，这是因为 $A\overline{\in}\mathscr{A}$.

引理 1.1.1 任意 σ-代数为单调类，任意单调的代数必为 σ-代数．

证 假定 $\mathscr{A}$ 为 σ-代数，$A_n,n\geqslant 1$，为 $\mathscr{A}$ 的一个单调子列，比如，$A_n\subset A_{n+1},n\geqslant 1$，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}.$$

于是，$\mathscr{A}$ 为单调类．

现设 $\mathscr{A}$ 为单调代数，那么 $\forall\ A_k\in\mathscr{A},k=1,2,\cdots$，令 $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k,n\geqslant 1$，则 $B_n\in\mathscr{A}$，且 $B_n\subset B_{n+1},n\geqslant 1$. 由 $\mathscr{A}$ 为单调类知：$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{A}$，从而 $\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数．

定义 1.1.4 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的非空子集类，记

$$M=\{\mathscr{E}:\mathscr{A}\subset\mathscr{E},\mathscr{E}\text{ 为 }\Omega\text{ 上的单调类}\}.$$

令 $m(\mathscr{A})=\bigcap\mathscr{E}$,其中 $\mathscr{E}\in M$,则称 $m(\mathscr{A})$ 为 Ω 上包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类.

例如,按引理 1.1.1,由代数产生的 σ-代数就是包含此代数的最小单调类.

§2 π-类和 λ-类

在 σ-代数的定义中要求集类封闭于可数并交运算.这个条件一般难以验证.Dynkin 利用单调类的性质提出了一种有效的判断方法.

定义 1.2.1 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个非空子集类.若

$$A,B\in\mathscr{A}\Longrightarrow A\cap B\in\mathscr{A},$$

则称 $\mathscr{A}$ 为一个 π-类.

定义 1.2.2 如果 Ω 上的子集类 $\mathscr{A}$ 满足下列条件:

(i)$\Omega\in\mathscr{A}$;

(ii)若 $A,B\in\mathscr{A}$,且 $A\supset B$,则必有 $A-B\in\mathscr{A}$;

(iii)若 $A,B\in\mathscr{A}$,且 $A\cap B=\varnothing$,则必有 $A\cup B\in\mathscr{A}$;

(iv)若 $A_n\in\mathscr{A}$,且 $A_n\uparrow$,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{A}$;

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个 λ-类.

引理 1.2.1 λ-类必是单调类.

证 按定义 1.2.2 中的条件(i)和(ii),有

$$A\in\mathscr{A}\Longrightarrow A^c\in\mathscr{A}.$$

现设 $A_n\in\mathscr{A}$,且 $A_n\downarrow$,记 $A=\bigcap A_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$,则

$$A^c=\bigcup_n A_n^c.$$

注意,$A_n^c\in\mathscr{A}$,且 $A_n^c\uparrow$,因此,$A^c=\lim\limits_{n\to\infty}A_n^c\in\mathscr{A}$.从而,$A\in\mathscr{A}$,故集类 $\mathscr{A}$ 为一个单调类.

引理 1.2.2 若一个 λ-类同时又是一个 π-类,则它必为一个

σ-代数.

证 设集类 $\mathscr{A}$ 既为 λ-类又为 π-类,那么,按引理 1.2.1,$\mathscr{A}$ 为一个单调类.若能证明 $\mathscr{A}$ 是一个代数,则按引理 1.1.1,$\mathscr{A}$ 为一个 σ-代数.

让 $A,B\in\mathscr{A}$,且 $A_1=A-A\cap B$. 因 $A\cap B\in\mathscr{A}$,且 $A\cap B\subset A$,而有 $A_1\in\mathscr{A}$. 注意:$A\cup B=A_1\cup B$,且 $A_1\cap B=\varnothing$,从而,$A_1\cup B\in\mathscr{A}$,于是,$A\cup B\in\mathscr{A}$,故 $\mathscr{A}$ 为一个代数.

例 1.2.1 设 $A,B\subset\Omega$,$A\cap B\neq\varnothing$,$A-B\neq\varnothing$,$B-A\neq\varnothing$,则

$$\mathscr{A}=\{\varnothing,\Omega,A,B,A^c,B^c\}$$

为一个 λ-类,但 $\mathscr{A}$ 不包含 A,B 之交.

定理 1.2.1 若 λ-类 $\mathscr{A}$ 包含 π-类 $\mathscr{D}$,则

$$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A},$$

其中,$\sigma(\mathscr{D})$表示由 $\mathscr{D}$ 产生的 σ-代数.

证 设 $\mathscr{G}$ 是含 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类,于是

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{A}\Longrightarrow\mathscr{G}\subset\mathscr{A}.$$

若 $\mathscr{G}$ 又为 π-类,则按引理 1.2.2,$\mathscr{G}$ 为 σ-代数,故 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$. 从而,$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A}$.

以下分二步来证明 $\mathscr{G}$ 为 π-类.

第一步,令 $\mathscr{G}_1=\{A:A\subset\Omega,A\cdot D\in\mathscr{G}\text{ 对一切 }D\in\mathscr{D}\}$,
则 $\mathscr{G}_1$ 具有下列性质:

(i)$\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_1$($\because\mathscr{D}$ 为 π-类);

(ii)$\mathscr{G}_1$ 为 λ-类($\because\mathscr{G}$ 是 λ-类).

注意,$\mathscr{G}$ 是含 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类,从而,有 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_1$,故对任意 $A\in\mathscr{G}$,$D\in\mathscr{D}$,按 $\mathscr{G}_1$ 之定义,有

$$A\cdot D\in\mathscr{G}. \tag{1.2.1}$$

第二步,令

$$\mathscr{G}_2=\{B:B\subset\Omega,A\cdot B\in\mathscr{G}\text{ 对一切 }A\in\mathscr{G}\},$$

则 $\mathscr{G}_2$ 具有下列性质:

(i)$\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_2$(由(1.2.1)式);

(ii)$\mathscr{G}_2$ 为 λ-类(由 $\mathscr{G}$ 是 λ-类);
于是,$\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_2$. 按 $\mathscr{G}_2$ 之定义,对$\forall$ $A,B\in\mathscr{G}$,有

$$A\cap B\in\mathscr{G}.$$

这表明:$\mathscr{G}$ 为一个 π-类.

推论 1.2.1 若 $\mathscr{A}$ 为包含 π-类 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类,则

$$\mathscr{A}=\sigma(\mathscr{D}).$$

§3 单调系和 λ-系

(一)乘积 σ-代数

定理 1.3.1 设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ-代数,则称$(\Omega,\mathscr{F})$为一个可测空间. 若 Ω 中的子集 $A\in\mathscr{A}$,则称 A 为 $\mathscr{F}$-可测集.

定理 1.3.2 设$(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$为可测空间,其中 $i=1,2,\cdots,n$.

记
$$\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n):\omega_i\in A_i\subset\Omega_i\},$$
$$\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i=\sigma(\{B:B=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\}).$$

则称 $\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i$ 为 n-维乘积 σ-代数;称 $\mathop{\times}_{i=1}^{n}\Omega_i$ 为 n-维乘积空间;称 $\mathop{\times}_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathscr{F}_i)=(\mathop{\times}_{i=1}^{n}\Omega_i,\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i)$为 n-维乘积可测空间.

注意,即使 $\mathscr{F}_i$ 是 σ-代数,集类$\{B:B=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\}$也不一定是 σ-代数,因此,关于此集类的 σ 化是必要的. 例如,设 $\Omega_i=\overline{R}=[-\infty,\infty],i=1,2.$ 又设

$$A_1=[-\infty,0],\quad A_2=[0,\infty],$$
$$\mathscr{F}_i=\{\varnothing,\Omega_i,A_1,A_2\}(i=1,2),$$

则集类

$$\{B:B=A^{(1)}\times A^{(2)},A^{(i)}\in\mathscr{F}_i,i=1,2\}$$

就不包含下列元素:

$$B_k=\Omega_1\times\Omega_2-(k),\quad k=1,2,3,4,$$

其中(k)表示第k象限.

定理 1.3.3 设

$$G=\{A:A=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,A_i\in\mathscr{F}_i\};$$

$$\mathscr{A}=\{B:B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i,m\geqslant 1,B_i\in G,B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)\};$$

则集类$\mathscr{A}$为含G的最小代数.

证 显然,对$\forall\ C_1,C_2\in G$,有$C_1\cdot C_2\in G$. 从而,G为π-类. 假定$\mathscr{A}_0$是含G的最小代数,则必有$\mathscr{A}\subset\mathscr{A}_0$. 事实上对$\forall\ B\in\mathscr{A}$,存在$m\geqslant 1$,$B_i\in G$,使得:$B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$. 于是,$B\in\mathscr{A}_0$. 因此,为使定理真,仅需证明$\mathscr{A}$为一个代数.

$\forall\ A_i\in\mathscr{A}(i=1,2)$,存在$m\geqslant 1$,$B_i,C_i\in G$,$i=1,2,\cdots,m$,使得 $B_i\cdot B_j=\varnothing=C_i\cdot C_j(i\neq j)$,$i,j=1,2,\cdots,m$且

$$A_1=\bigcup_{i=1}^{m}B_i,A_2=\bigcup_{i=1}^{m}C_i.$$

于是

$$A_1\cdot A_2=\bigcup_{i,j=1}^{m}B_i\cdot C_j=\bigcup_{k=1}^{l}D_k,\text{其中 }D_k\in G,D_i\cdot D_j=\varnothing(i\neq j),$$

从而,$A_1\cdot A_2\in\mathscr{A}$,此即表明:$\mathscr{A}$是$\pi$-类.

假定如下命题成立:

命题(*):若$B\in G$,则$B^c\in\mathscr{A}$.

注意:$\forall\ A\in\mathscr{A}$,存在$m\geqslant 1$及$B_i\in G$,$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$,$i,j=1,2,\cdots,m$,使得 $A=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$. 从而,$A^c=\bigcap_{i=1}^{m}B_i^c$. 利用命题(*),可得:$A^c\in\mathscr{A}$. 由此推出$\mathscr{A}$为封闭于补运算的$\pi$-类,从而,$\mathscr{A}$为一个代数.

现在仅就$n=2$来证明命题(*). 一般情形可用归纳法证之. $B\in G$及$n=2$表明:存在$A_i\in\mathscr{F}_i$,$i=1,2$,使得:$B=A_1\times A_2$. 于是

$$B^c=A_1^c\times A_2\cup A_1\times A_2^c\cup A_1^c\times A_2^c.$$

此式右边的三项互不相交，且均为 G 的元素，故 $B^c \in \mathscr{A}$.

定义 1.3.1 设 $A \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \mathscr{F}_i (m \leqslant n)$，则形如 $A \times \mathop{\times}\limits_{m+1}^{n} \Omega_i$ 的集叫做具有 m-维基 A 的柱集.

定义 1.3.2 设$(\Omega_i, \mathscr{F}_i), i=1,2,\cdots$，为可测空间. 记

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots): \omega_i \in A_i \subset \Omega_i, i \geqslant 1\};$$

$$\mathscr{G} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{A: A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathscr{F}_i, 1 \leqslant i \leqslant m; A_i = \Omega_i, i > m\};$$

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i = \sigma(\mathscr{G});$$

则称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathscr{F}_i) = (\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i)$ 为无穷维可测空间.

(二)可测函数

定义 1.3.3 设 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$，则有

$$\mathscr{A} = \{A: A = (a, b], a, b \in \mathbf{R}, \text{或 } A = (-\infty, b], b \in \mathbf{R}\}.$$

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}).$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 Borel σ-代数.$(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 为 1-维 Borel 可测空间. $\mathscr{B}$ 中的元素 B 叫做 $\mathbf{R}$ 中的 Borel 子集.

定义 1.3.4 若 $\xi: (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 为可测映射，即

$$\{\omega: \xi(\omega) \in B, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{F} (\forall\ B \in \mathscr{B}),$$

则称 ξ 是 $\mathscr{F}$-可测的.

若 ξ 是从$(\mathbf{R}, \mathscr{B})$到其自身的可测映射，则称 ξ 为 Borel 可测函数或简称为 Borel 函数.

定义 1.3.5 设 H 为非负函数族. 如果

(i)$1 \in H$;

(ii)$x_n \in H$，且 $x_n \uparrow x \Longrightarrow x \in H$;

(iii)$x_i \in H$，c_i 为有限实数，$i=1,2$，且 $c_1 x_1 + c_2 x_2 \geqslant 0$，$\Longrightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2 \in H$;

则称 H 为 λ-系.

定义 1.3.6 设 M 为非空非负函数族．若

(i) $x_n \in M$，且 $x_n \uparrow x \Longrightarrow x \in M$，

(ii) $x_i \in M$，C_i 为有限非负实数，$i=1,2$，

$\Longrightarrow C_1x_1+C_2x_2 \in M$，

则称 M 为单调系．

定理 1.3.4 λ-系必为单调系．其逆不真．

定理 1.3.5 设 $\mathscr{D}$ 是 Ω 的子集类，H 是 Ω 上的非负函数族，且

$$\{x: x=\chi_A, A \in \mathscr{D}\} \subset H, \tag{1.3.1}$$

其中，
$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \overline{\in} A.\end{cases}$$

若 (i) $\mathscr{D}$ 为 π-类，H 为 λ-系，

(ii) $\mathscr{D}$ 为 σ-代数，H 为单调系，

则 H 包含所有非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数．

证 设 x 为任意非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数，则

$$A_{k,n}=\left\{\omega: \frac{k}{2^n} \leqslant x(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \in \sigma(\mathscr{D}), \forall\ n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant 4^n-1;$$

$$A_{4^n,n}=\{\omega: 2^n \leqslant x(\omega)\} \in \sigma(\mathscr{D}).$$

令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{4^n} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{k,n}}(\omega)$，则 $x_n \forall\ n \geqslant 2$ 是 $\sigma(\mathscr{D})$-可测的，且 $x_n \uparrow x$. 如果 $x_n \in H (n \geqslant 2)$，则因 H 在条件(i)或(ii)下均为单调系，必有 $x \in H$. 从而得到结论．

令 $\mathscr{G}=\{A: \chi_A \in H, A \subset \Omega\}$，则按(1.3.1)式有 $\mathscr{D} \subset \mathscr{G}$.

若 $\mathscr{D}$ 为 σ-代数，则有 $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{G}$. 从而，$A_{k,n} \in \sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{G}$. 于是，$\chi_{A_{k,n}} \in H$. 注意：$\frac{k}{2^n} \geqslant 0$ 及 H 为单调系，而有 $x_n \in H (n \geqslant 2)$，故在条件(ii)下得到所要求的结论．

现设条件(i)成立．如果 $\mathscr{G}$ 为 λ-类，则由 $\mathscr{D}$ 为 π-类及定理 1.2.1 可知：$\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{G}$. 从而，$x_n \in H (n \geqslant 2)$. 因此，剩下的问题是验证 $\mathscr{G}$ 为 λ-类．

(i)$\Omega\in\mathscr{G}$($\because \chi_\Omega=1\in H$).

(ii)$A,B\in\mathscr{G},A\cdot B=\varnothing\Rightarrow\chi_A,\chi_B\in H$. 取 $c_1=1=c_2$，则 $\chi_A+\chi_B\geqslant 0$. 由 H 为 λ-系，有 $\chi_A+\chi_B\in H$，故

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B\Longrightarrow\chi_{A\cup B}\in H\Longrightarrow A\cup B\in\mathscr{G}.$$

(iii)$A,B\in\mathscr{G},A\supset B\Longrightarrow\chi_A$、$\chi_B\in H$，取 $c_1=1,c_2=-1$，则 $\chi_A-\chi_B=\chi_{A-B}\geqslant 0\Longrightarrow\chi_{A-B}\in H\Longrightarrow A-B\in\mathscr{G}$.

(iv)$A_n\in\mathscr{G},(n\geqslant 1)$且 $A_n\uparrow\Longrightarrow\chi_{A_n}\uparrow,\chi_{A_n}\in H$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}\in H\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{G},$$

故 $\mathscr{G}$ 为 λ-类.

(三)可测函数的表现

设 ξ 为定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的实值可测函数. 记

$$\xi^{-1}(\mathscr{B})=\{A:A=\{\omega:\xi(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B}\}\subset\mathscr{F},$$

则 $\xi^{-1}(\mathscr{B})$亦为 σ-代数，通常记为 $\sigma(\xi)=\xi^{-1}(\mathscr{B})$，有时也称它是由 ξ 产生的 σ-代数.

定义 1.3.7 设 T 为任一有序集. $\{x_t,t\in T\}$为定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的实可测函数族，让

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\{\omega:x_t(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B},t\in T\}),\tag{1.3.2}$$

则称 $\sigma(x_t,t\in T)$为由此可测函数族产生的 σ-代数.

例 1.3.1 设 $T=\{1,2,\cdots\}$，则

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\{x_i\leqslant\lambda_i\},i\in T,\lambda_i\in\mathbf{R}\}),$$

$$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i\leqslant\lambda_i\},n\geqslant 1,\lambda_i\in\mathbf{R}\}),$$

或 $$\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\{A:A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x_i\in B_i\},n\geqslant 1,B_i\in\mathscr{B}\}).$$

例 1.3.2 设 $T=[0,\infty)$，让

$\mathscr{A}=\{A:A=\{\omega;x_{t_1}(\omega),\cdots,x_{t_n}(\omega)\},\in B_n\},n\geqslant 1;t_i\in T,t_1<\cdots<t_n,B_n\in\mathscr{B}^n\}$,

则 $\sigma(x_t,t\in T)=\sigma(\mathscr{A})$，其中，$\mathscr{B}^n$ 为 n-维 Borel σ-代数.

假定 $\mathscr{X}_T$ 为一切定义在 T 上的函数集，让

$$\mathscr{B}_T=\sigma(\{B:B=\bigcap_{k=1}^{n}\{x:x_{t_k}\leqslant\lambda_k\},\ n\geqslant 1;t_k\in T,t_1<\cdots<t_n,\lambda_k\in\mathbf{R}\}),$$

则 $$\sigma(x_t,t\in T)=\{A:A=\{\omega:x.(\omega)\in B\},B\in\mathscr{B}_T\}.$$

定理 1.3.6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义于可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的实值可测函数，则定义于 Ω 上的实值函数 $\xi(\omega)$ 是 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$-可测的充要条件是：存在 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 函数 f，使得：$\xi(\omega)=f(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$.

证 充分性显然. 下证必要性.

注意到任意可测函数均可作如下分解

$$\xi(\omega)=\xi^+(\omega)-\xi^-(\omega),$$

其中，$\xi^\pm(\omega)$ 为非负可测函数，因此，不妨假定：$\xi(\omega)$ 为非负可测函数，即 $\xi(\omega)\geqslant 0$，$(\forall\ \omega\in\Omega)$.

定义下列集：

$\mathscr{G}=\{f:f:(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})\}$（即 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 函数类）.

$H=\{\xi:\xi(\omega)=f(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)),f\in\mathscr{G},\omega\in\Omega$，且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\}$.

$$\mathscr{D}=\{D:D=\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k(\omega)\leqslant\lambda_k\},\lambda_k\in\mathbf{R}\}.$$

显然 $\mathscr{D}$ 为 π-类，且 $\sigma(\mathscr{D})=\sigma(\underline{X})$，其中 $\underline{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

对 $\forall\ D\in\mathscr{D}$，有 $D=\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k(\omega)\leqslant\lambda_k\}$. 令

$$B^{\underline{\lambda}}=\bigcap_{k=1}^{n}\{\underline{X}:X_k\leqslant\lambda_k\},\ \tilde{\chi}_{\underline{\lambda}}(x)=\begin{cases}1, & \underline{X}\in B^{\underline{\lambda}},\\ 0, & \underline{X}\notin B^{\lambda},\end{cases}$$

则 $\chi_D(\omega)=\tilde{\chi}_{\underline{\lambda}}(\underline{X}(\omega))(\omega\in\Omega)$. 因 $\tilde{\chi}_{\lambda}\in\mathscr{G}$ 而有 $\chi_D\in H$.

于是，
$$\{\xi:\xi=\chi_D,D\in\mathscr{D}\}\subset H.$$

如果 H 为 λ-系，则由定理 1.3.5，一切 $\sigma(X)$-可测的函数属于 H. 再由 H 之定义即得结论.

下面来验证 H 为 λ-系.

(i)$1\in H$(按 H 之定义).

(ii)$\xi_i\in H, c_i$ 为有限实数 $(i=1,2)$,且 $c_1\xi_1+c_2\xi_2\geqslant 0$,则

$$c_1\xi_1+c_2\xi_2\in H.$$

事实上,$\xi_i\in H\Longrightarrow\exists\ f_i\in\mathscr{G}$,使得

$\xi_i(\omega)=f_i(\underline{X}(\omega)), f_i(\underline{x})\geqslant 0(\forall\ \underline{x}\in\mathbf{R}^n), i=1,2.$

注意:$B^c\triangleq\{c_1f_1=-c_2f_2=\pm\infty\}\cup\{c_1f_1+c_2f_2<0\}\in\mathscr{B}^n$. 令

$f(\underline{x})=(c_1f_1(\underline{x})+c_2f_2(\underline{x}))\tilde{\chi}_B(\underline{x}), (\forall\ \underline{x}\in\mathbf{R}^n),$

则显然有 $f\in\mathscr{G}$,且

$$f(\underline{X}(\omega))=c_1\xi_1(\omega)+c_2\xi_2(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

$$f(\underline{x})\geqslant 0\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}),$$

故
$$c_1\xi_1(\cdot)+c_2\xi_2(\cdot)\in H.$$

(iii)若 $\xi_k\in H$,且 $\xi_k\uparrow\xi$,则 $\xi\in H$.

事实上,$\xi_k\in H\Longrightarrow\exists\ f_k\in\mathscr{G}$,使得 $f_k(\underline{x})\geqslant 0\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}^n)$,

$$\xi_k(\omega)=f_k(\underline{X}(\omega)).$$

从而,有 $f_k(\underline{X}(\omega))\uparrow\xi(\omega)$. 令

$$g_m(\underline{x})=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{f_i(\underline{x})\}\quad(\underline{x}\in\mathbf{R}^n),$$

则 $g_m\uparrow g\in\mathscr{G}$,且 $g(\underline{x})\geqslant 0(\underline{x}\in\mathbf{R}^n)$,

$$0\leqslant f_m(\underline{X}(\omega))=g_m(\underline{X}(\omega))\leqslant f_{m+1}(\underline{X}(\omega))\quad(\omega\in\Omega),$$

故 $g(\underline{X}(\omega))=\xi(\omega)\quad(\omega\in\Omega)$,从而 $\xi\in H$.

按定义 1.3.5,H 为 λ-系.

定理 1.3.7 设$\{X_t, t\in T\}$为定义在$(\Omega,\mathscr{F})$上的一族实值可测函数,则 $\xi(\omega)$是 $\sigma(X_t, t\in T)$-可测的充要条件是:存在无穷维空间上的 Borel 函数 f 及$(t_i, i\geqslant 1)\subset T$,使得

$$\xi(\omega)=f(X_{t_1}(\omega),X_{t_2}(\omega),\cdots), t_i\in T, i=1,2,\cdots$$

证 充分性显然,现证必要性.

定义下列集:

$$\mathscr{G}=\{f: f:(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})\}.$$

$H=\{\xi:\xi(\omega)=f(\underline{X}(\omega)),\omega\in\Omega; f\in\mathscr{G}$ 且 $f(\underline{x})\geqslant 0, \underline{x}\in\mathbf{R}^\infty,$

其中，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots)$，$\underline{X}=(X_{t_1},X_{t_2},\cdots)$，$t_i\in T$，$i=1,2,\cdots\}$.

$\mathscr{D}=\{D:D=\{\omega:X_{t_k}(\omega)\leqslant\lambda_k,1\leqslant k\leqslant n\};n\geqslant 1;\lambda_i\in R,t_i\in T,$ $1\leqslant i\leqslant n\}$.

显然，$\mathscr{D}$ 是 Ω 上的 π-类；$\sigma(\mathscr{D})=\sigma(X_t,t\in T)$，让

$$\chi_D(\omega)=\chi_{B_D}(\underline{X}_n(\omega)),$$

其中，$\underline{X}_n(\omega)=(X_1,\cdots,X_n)$，$B_D=\{\underline{x}_n:x_i\leqslant\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n\}$. 令

$$f(\underline{x}_n)=\chi_{B_D}(\underline{x}_n)\geqslant 0,$$

则 $f\in\mathscr{G}$，从而，$\chi_D\in H$，于是得到

$$\{\xi:\xi=\chi_D,D\in\mathscr{D}\}\subset H.$$

类似于定理 1.3.6 之证明可验证：H 为 λ-系．从而，利用定理 1.3.2 即知：H 包含一切 $\sigma(\mathscr{D})=\sigma(X_t,t\in T)$-可测的非负函数．

对于一般的 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数 $\xi(\omega)$，可有分解式：

$$\xi(\omega)=\xi^+(\omega)-\xi^-(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

其中，$\xi^\pm(\omega)$ 均为非负 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数. 由上述证明知：存在 $\{t_i\}$ 和 $\{t'_i\}\subset T$ 及 $f^\pm\in\mathscr{G}$，使得

$$\xi^+(\omega)=f^+(X_{t_1}(\omega),X_{t_2}(\omega),\cdots),$$

$$\xi^-(\omega)=f^-(X_{t'_1}(\omega),X_{t'_2}(\omega),\cdots).$$

让 $\{\bar{t}_k\}=\{t_i\}\cup\{t'_i\}$，则必有

$$\xi(\omega)=\bar{f}(X_{\bar{t}_1}(\omega),X_{\bar{t}_2}(\omega),\cdots),\omega\in\Omega,$$

其中，
$$\bar{f}^-(X_{\bar{t}_1},X_{\bar{t}_2},\cdots)=f^-(X_{t'_1},X_{t'_2},\cdots),$$

$$\bar{f}^+(X_{\bar{t}_1},X_{\bar{t}_2},\cdots)=f^+(X_{t_1},X_{t_2},\cdots).$$

这就完成了此定理的证明．

第二章　条件期望

鞅分析是在条件期望理论的基础上发展起来的一个数学分支，因此，条件期望理论在随机分析中是重要基础之一．本章将介绍条件期望的概念及其基本性质．

设 Ω 为基本事件空间，$\mathscr{A}$ 是 Ω 上的非空子集类，μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的实值集函数．

若对 $\forall A\in\mathscr{A}$，有 $|\mu(A)|<\infty$，则说 μ 在 $\mathscr{A}$ 上是有限的．

若 $A\in\mathscr{A}$，且 $\exists\ \{A_i,i\geqslant 1\}\subset\mathscr{A}$，$\ni A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 且 $|\mu(A_i)|<\infty$，$i\geqslant 1$，则说 $\mu(A)$ 是 σ-有限的．

若 $\Omega\in\mathscr{A}$，且 $\exists$ 集列 $\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{A}$，$\ni\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$ 且 $|\mu(A_n)|<\infty$，$n\geqslant 1$，则说 μ 在 $\mathscr{A}$ 上 σ-有限．

例如，在可测空间 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上定义的 Lebesque 测度 λ 就是 σ-有限的．定义在其上的概率测度 μ 是全有限的．本章所指的测度均是非负 σ-可加集函数．

§1　Radon-Nikodym 定理

定理 2.1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为一测度空间，T 为任一非空实数集，$\{g_t,t\in T\}$ 是从 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathscr{F}$-可测的函数族．若函数 $g:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$ 满足下列条件：

(i) g 是 $\mathscr{F}$ 可测的；

(ii) $g\geqslant g_t(\mathrm{mod}\,\mu)$，$t\in T$；

(iii) 若 h 是满足条件(i)、(ii)的任意 $\mathscr{F}$-可测函数，则必有 $h\geqslant g(\mathrm{mod}\,\mu)$，那么，称 g 为 $\{g_t,t\in T\}$ 的本质上确界．记为

$$g=\underset{t\in T}{\mathrm{esup}}\{g_t\}.$$

注意：若 T 为可数集，则一般的上确界 $\sup_{t\in T}\{g_t\}$ 就是 g_t 的本质上确界．如果 T 不为可数集，则就一般情形而言 $\sup\{g_t, t\in T\}$ 的可测性不是很清楚的．

定义 2.1.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu_i)(i=1,2)$ 为测度空间．若

$$\mu_2(A)=0(A\in\mathscr{F})\Longrightarrow\mu_1(A)=0,$$

则称 μ_1 关于 μ_2 是绝对连续的或说 μ_1 是 μ_2-连续的．

例如，设 $(\mathbf{R},\mathscr{B},\lambda)$ 为 Lebesque 测度空间．$\varphi(x)$ 为此空间上的非负可积函数，则

$$\lambda_1(B)=\int_B\varphi(x)\lambda(\mathrm{d}x)\quad(B\in\mathscr{B}),$$

定义 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上的一个测度 λ_1，那么按定义 2.1.1，测度 λ_1 是 λ-连续的．

定义 2.1.2 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu_i)(i=1,2)$ 为测度空间．若存在 $N\in\mathscr{F}$，使得 $\mu_1(N)=0,\mu_2(N^c)=0$，则说测度 μ_1、μ_2 是相互奇异的，记为 $\mu_1\perp\mu_2$.

引理 2.1.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是一个 σ-有限测度空间．$\{g_t, t\in T\}$ 为一实值 $\mathscr{F}$ 可测函数族，则存在可数子集 $T_0\subset T$，使得

$$\sup\{g_t, t\in T_0\}=\mathrm{esup}\{g_t, t\in T\}(\mathrm{mod}\,\mu).$$

证 不失一般性，可设 $\mu(\Omega)<\infty$，$|g_t|\leqslant c<\infty(t\in T)$.

令
$$a=\sup\{E(\sup_{t\in N}(g_t)), N\in S\},$$

其中，$S=\{N: N\subset T, N$ 为有限或可数集$\}$，

$$EX=\int_\Omega X\mathrm{d}\mu,$$

那么可选 $N_n\in S, N_n\uparrow$，使得

$$a=\lim_{n\to\infty}E(\sup_{t\in N_n}(g_t))=E(\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in N_n}(g_t))=Eg,$$

其中 $g=\sup_{t\in T_0}\{g_t\}, T_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$.

现在证明：$g=\underset{t\in T}{\mathrm{esup}}\{g_t\}(\mathrm{mod}\,\mu)$，其中

(i)g 是 $\mathscr{F}$-可测的；

(ii)$g \geqslant g_t(\bmod \mu), t \in T$.

若不然，必有 $t' \in T$，使得

$$\alpha < E(g \vee g_{t'}) = E(\sup\{g_t, t \in T_0 \cup \{t'\}\}) \leqslant \alpha.$$

最后的不等式成立是因为 $T_0 \cup \{t'\} \in S$，这就矛盾了．

(iii)若 h 是 $\mathscr{F}$-可测的，且 $h \geqslant g_t(\bmod \mu), t \in T$，则必有

$$h \geqslant \sup\{g_t, t \in T_0\} = g(\bmod \mu).$$

于是，g 满足定理 2.1.1 中的三条要求．

定理 2.1.2 设 υ, μ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度，记

$$H = \{h : h \text{ 非负可测，且} \int_A h \mathrm{d}\mu \leqslant \upsilon(A), (\forall A \in \mathscr{F})\},$$

则

$$\upsilon(A) = \psi(A) + \varphi(A) \quad (\forall A \in \mathscr{F}), \tag{2.1.1}$$

其中，ψ 为 μ-奇异测度($\psi \perp \mu$).

φ 为 μ-连续测度，且由下式定义：

$$\varphi(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu, \forall A \in \mathscr{F},$$

$$g = \operatorname{esup}\{h : h \in H\}(\bmod \mu).$$

测度 υ 的上述分解是唯一的．

证　$\mu = 0$ 是平凡的，下设 $\mu \neq 0$，另外，不失一般性，设 υ, μ 均为(全)有限测度．

按引理 2.1.1 可构造 $g = \operatorname{esup}\{h : h \in H\} \in H$. 定义测度 φ 和 ψ 如下：

$$\varphi(A) = \int_A g \mathrm{d}\mu, \psi(A) = \upsilon(A) - \varphi(A) \quad (\forall A \in \mathscr{F}),$$

则 φ, ψ 均为(全)有限测度，且 φ 是 μ-连续的．

这里，略去关于 $\psi \perp \mu$ 的证明，有兴趣的读者可以参见文献[2]所给出的一个精彩的证明．

最后证明唯一性. 假定另有一分解：

$$\upsilon = \tilde{\psi} + \tilde{\varphi},$$

其中，$\tilde{\psi}\perp\mu$，$\tilde{\varphi}$是 μ-连续的，于是

$$\psi-\tilde{\psi}=\tilde{\varphi}-\varphi.$$

由 $\psi\perp\mu$，$\tilde{\psi}\perp\mu$ 知：$\exists\ N_i\in\mathscr{F}$，$\ni\mu(N_i)=0(i=1,2)$，$\psi(N_1^c)=0$，$\tilde{\psi}(N_2^c)=0$. 从而，得

$$\psi(A\cap N_1^c\cap N_2^c)=0=\tilde{\psi}(A\cap N_1^c\cap N_2^c)\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}).$$

又对于使 $\mu(N)=0$ 的 $N\in\mathscr{F}$，有 $\varphi(N)=\tilde{\varphi}(N)$，从而，$\psi(N)=\tilde{\psi}(N)$. 于是，$\forall\ A\in\mathscr{F}$，

$$\begin{aligned}\psi(A)&=\psi(A\cap N_1^c\cap N_2^c)+\psi(A\cap(N_1\cup N_2))\\&=\tilde{\psi}(A\cap N_1^c\cap N_2^c)+\tilde{\psi}(A\cap(N_1\cup N_2))=\tilde{\psi}(A),\end{aligned}$$

故 $\psi=\tilde{\psi}$. 从而，$\varphi=\tilde{\varphi}$. 唯一性得证.

定理 2.1.3 若 ψ 既是 μ-奇异的，又是 μ-连续的，则 $\psi=0$.

证 ψ 为 μ-连续 $\Longrightarrow\psi(A)=0$ 当 $\mu(A)=0$ 时($A\in\mathscr{F}$)，ψ 为 μ-奇异 $\Longrightarrow\exists\ A_0\in\mathscr{F}$，$\ni\mu(A_0)=0$，$\psi(A_0^c)=0$.

但 $\psi(A_0)=0$. 于是 $\psi(\Omega)=\psi(A_0)+\psi(A_0^c)=0$，故 $\psi=0$.

定理 2.1.4 若 υ,μ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的 σ-有限测度，且 υ 是 μ-连续的，则存在一个非负的，且(modμ)有限的 $\mathscr{F}$-可测函数 g，使得

$$\upsilon(A)=\int_A g\mathrm{d}\mu\ ,\forall\ A\in\mathscr{F},\qquad(2.1.2)$$

且 g 唯一到$[\mu]$-零集.

证 由定理 2.1.1 和引理 2.1.1 立即可得此结论.

定义 2.1.3 称(2.1.2)式中(modμ)有限的 $\mathscr{F}$-可测函数 g 为 υ 对 μ 的 Radon-Nikedym 导数，记为 $g=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}$，且

$$\upsilon(A)=\int_A\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}).\qquad(2.1.3)$$

定理 2.1.5 设 υ,μ 为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的 σ-有限测度，υ

是 μ-连续的，若 X 是一个 $\mathscr{F}$-可测函数，且积分 $\int_\Omega X\mathrm{d}\upsilon$ 存在，则

$$\int_A X\mathrm{d}\upsilon = \int_A X\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu \quad (\forall\ A\in\mathscr{F}). \tag{2.1.4}$$

证 让 $X=X^+-X^-$，其中 $X^+=X\vee 0, X^-=-(X\wedge 0)$.

由 $\int_\Omega X\mathrm{d}\upsilon$ 存在可知 $\int_\Omega X^+\mathrm{d}\upsilon$ 和 $\int_\Omega X^-\mathrm{d}\upsilon$ 中至少有一个有限，故不妨设 $X\geqslant 0$. 另外，不失一般性，可设 μ 有限，令

$H=\{X: X$ 非负 $\mathscr{F}$-可测，且

$$\int_A X\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu = \int_A X\mathrm{d}\mu, \forall\ A\in\mathscr{F}\},$$

则 H 包含所有非负 $\mathscr{F}$-可测函数.

事实上，对$\forall\ A,B\in\mathscr{F}$，有

$$\int_A \chi_B\mathrm{d}\upsilon = \upsilon(A\cdot B) = \int_{A\cdot B}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu = \int_A \chi_B\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu.$$

因此，$\chi_B\in H(\forall\ B\in\mathscr{F})$. 因此即知：$H$ 包含任意非负简单可测函数. 对一般的非负 $\mathscr{F}$-可测函数 f，存在非负简单可测函数列 $\{f_n, n\geqslant 1\}$，使得 $f_n\uparrow f$. 由单调收敛定理知

$$\int_A f\mathrm{d}\upsilon = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\upsilon = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu$$
$$= \int_A f\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu \quad (\forall\ A\in\mathscr{F}),$$

故 $f\in H$，从而定理得证.

推论 2.1.1 设 X 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值 r.v，且 $F(x)$和 $f(x)$分别为其分布函数和密度函数. 又设 g 是 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 函数，且 $Eg(X)$存在，

则
$$P(X\in B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_B g(x)F(\mathrm{d}x) = \int_B g(x)f(x)\mathrm{d}x \quad (\forall\ B\in\mathscr{F}).$$

§2 条件期望的定义

考虑概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数. P_*是 P 在

$\mathscr{G}$上的限制，即

$$P_*(A)=P(A) \quad (\forall\ A\in\mathscr{G}).$$

显然，P_*是$(\Omega,\mathscr{G})$上的概率测度，假定X是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非负可积变量，那么可由X产生$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个有限的P_*-连续的测率υ：

$$\upsilon(A)=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{G}).$$

于是，根据R-N定理，存在$(\mathrm{mod}P_*)$有限的$\mathscr{G}$-可测函数y，使得$\forall\ A\in\mathscr{G}$，有

$$\int_A X\mathrm{d}P=\upsilon(A)=\int_A y\mathrm{d}P_*=\int_A y\mathrm{d}P_*.$$

这里$y=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P_*}$. 注意$y$由$X$和$\mathscr{G}$决定. 通常称$y$为$X$在条件$\mathscr{G}$下的条件期望. 其一般定义如下：

定理2.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$表示$\mathscr{F}$中的某个子σ-代数. X为实值$\mathscr{F}$-可测函数，且积分EX存在(即$EX^+\wedge EX^-<\infty,X^+=X\vee 0,X^-=|X\wedge 0|$). 若定义在$\Omega$上的实值函数$y$具有下列性质：

(i) y是$\mathscr{G}$-可测的；

(ii) $\int_A y\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{G})$,

则称y为X在条件$\mathscr{G}$下的条件期望，记为

$$y=E(X/\mathscr{G}).$$

从定义的条件(ii)中可以看出：条件期望是一个具有这样性质的$\mathscr{G}$-可测函数：它在$\mathscr{G}$中的任一元素A上的平均值等于X在A上的平均值.

例2.2.1 设$\{A_i,i\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}$，$\bigcup A_i=\Omega$，$A_i\bigcap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\mathscr{G}=\sigma(\{A_i,i\geqslant 1\})$，则$Y=E(X/\mathscr{G})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\chi_{A_i}$，且当$P(A_i)\neq 0$时，

$$a_i=P^{-1}(A_i)\int_{A_i}X\mathrm{d}P.$$

当 $P(A_i)=0$ 时，a_i 为任意给定的实数值．

显然 Y 是 $\mathscr{G}$-可测的．对$\forall\ A\in\mathscr{G}$，$\exists\ \{k_e, e\geqslant 1\}\subset\{1,2,\cdots\}$，使得 $A=\bigcup\limits_e A_{k_e}$，于是

$$\int_A Y\mathrm{d}P=\sum_i\int_{\bigcup\limits_e A_{k_e}} a_i x_{A_i}\mathrm{d}P=\sum_e a_{k_e}P(A_{k_e})$$

$$=\sum_e\int_{A_{k_e}} X\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P.$$

从而，Y 满足定理 2.1.1 中的条件(i)和(ii)，故命题中的 Y 为 X 在条件 $\mathscr{G}$ 下的条件期望．

例 2.2.2 设 $\xi(\omega)$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的服从均匀分布 $F(x)$的实值 $r.v$，即

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x.\end{cases}$$

又设 $A=\{\omega:\xi(\omega)<\frac{1}{2}\}$，$A^c=\{\omega:\frac{1}{2}\leqslant\xi(\omega)\}$，$\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega,A,A^c\}$，

那么
$$E(\xi/\mathscr{G})=\frac{1}{4}\chi_A+\frac{3}{4}\chi_{A^c}.$$

例 2.2.3 条件概率是条件期望的特例．

事实上，对$\forall\ A\in\mathscr{F}$，定义：

$$P(A/\mathscr{G})=E(\chi_A/\mathscr{G}),\tag{2.2.1}$$

则称 $P(A/\mathscr{G})$为事件 A 在条件 $\mathscr{G}$ 下的条件概率．

注意，对$\forall\ B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B E(\chi_A/\mathscr{G})\mathrm{d}P=\int_B\chi_A\mathrm{d}P=P(AB)=P(B)P(A/B).$$

因此，如果 $P(B)\neq 0$，则

$$P(A/B)=P^{-1}(B)\int_B P(A/\mathscr{G})\mathrm{d}P.$$

现在，考虑这样的问题：条件期望是否存在且唯一，为了解决这个问题，需要推广 R-N. 定理．定义广义测度如下：

$$\lambda(A)=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{G}), \tag{2.2.2}$$

其中 X 为 $\mathscr{F}$-可测函数，这样定义的 λ 可以表示成两个正测度之差：$\lambda=\lambda^+-\lambda^-$. 为确定计，设 λ^- 为有限测度. 因此，不妨假设 $X\geqslant 0$. 这时 $\lambda=\lambda^+$. 然而，即使 X 为一个 r.v. 也不能断定 λ 是 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上的 σ-有限测度，例如：设 $X\geqslant 0$, $EX=\infty$, X 为 r.v.. 设 $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$. 那么在 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上可定义如下测度

$$\lambda(A)=\int_A X\mathrm{d}P=\begin{cases}\infty, & \text{当 } A=\Omega \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } A=\varnothing \text{ 时}\end{cases}\ (A\in\mathscr{G}).$$

这个测度 λ 就不是 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上的 σ-有限测度，这样，就不能保证 R-N 定理中的条件满足. 故必须推广这个定理. 注意：如果 r.v. X 满足条件 $E|X|<\infty$，则由(2.2.2)定义的测度 λ 是 σ-有限的. 于是，在这种情形下，条件期望的存在性问题可依据 R-N 定理获得解决.

引理 2.2.1 设 υ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 P-连续测度. 那么存在集 $E\in\mathscr{F}$，使得 υ 在 $\mathscr{F}\cap E$ 上 σ-有限，且对 $\forall\ A\in\mathscr{F}\cap E^c$，

$$\upsilon(A)=0=P(A) \text{ 或 } \upsilon(A)=\infty>P(A)>0.$$

证 令 $\mathscr{D}=\{D:D\in\mathscr{F},\upsilon \text{ 在 } \mathscr{F}\cap D \text{ 上 } \sigma\text{-有限}\}$，

$$\alpha=\sup\{P(D):D\in\mathscr{D}\}.$$

注意，υ 是 P-连续的，因此，对任意使 $P(A)=0$ 的 $A\in\mathscr{F}$，有 $\upsilon(A)=0$. 从而，$A\in\mathscr{D}$. 故 $\mathscr{D}$ 非空.

现在 $\mathscr{D}$ 中选一子列 $\{D_n,n\geqslant 1\}$，使得

$$\alpha=\sup\{P(D_n),n\geqslant 1\},$$

则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n\in\mathscr{D}$. 事实上，$\upsilon$ 在 $\mathscr{F}\cap D_n$ 上 σ-有限意味着存在集列 $\{A_i^{(n)},i\geqslant 1\}\subset\mathscr{F}\cap D_n$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_i^{(n)}=D_n$，使得 $\upsilon(A_i^{(n)})<\infty$, $i\geqslant 1$. 于是 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^{(n)}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，其中

$$E_1=A_1^{(1)},E_2=A_1^{(2)}\cup A_2^{(1)},\cdots,E_k=\bigcup_{\substack{j+i=k+1\\1\leqslant i\leqslant k}}A_i^{(j)},\cdots$$

显然，$\upsilon(E_k)<\infty, k\geqslant 1$. 故 $E\in\mathscr{D}$，且 $\alpha=P(E)$.

设 $B\in\mathscr{F}\cap E^c$，则

(i)若 $\upsilon(B)<\infty$，必有 $B\in\mathscr{D}$，从而

$$\alpha\geqslant P(B\cup E)=P(B)+P(E).$$

由此立即可得：$P(B)=0$，故 $\upsilon(B)=0$；

(ii)若 $\upsilon(B)=\infty$，必有 $P(B)>0$. 否则由 υ 的 P-连续性 $P(B)=0$ 必导致 $\upsilon(B)=0$.

引理 2.2.2 （R-N 定理的推广） 若 υ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 P-连续测度，则存在一个 $\mathscr{F}$-可测函数 $\frac{d\upsilon}{dP}\geqslant 0(\mathrm{mod}P)$，使得

$$\upsilon(A)=\int_A \frac{d\upsilon}{dP}dP \quad (\forall\ A\in\mathscr{F}). \tag{2.2.3}$$

若 υ 是 σ-有限的，则 $\frac{d\upsilon}{dP}$ 为 r.v(即 mod$P$ 有限).

证 设 E 为引理 2.2.1 中所确定的集，将 υ,P 限制到 $\mathscr{F}\cap E$ 上，并分别记为 υ' 和 P'. 那么 υ' 是 σ-有限的，且 P'-连续，于是由 R-N. 定理，$\frac{d\upsilon'}{dP'}$ 在 E 上存在且(modP')有限.

定义 $\frac{d\upsilon}{dp}=\begin{cases}\frac{d\upsilon'}{dP'}, \omega\in E,\\ \infty, \omega\in E^c,\end{cases}$ 则 $\frac{d\upsilon}{dp}$ 是 $\mathscr{F}$-可测的，且按引理 2.2.1，(2.2.3)式成立. 事实上，当 $A\in\mathscr{F}\cap E$ 时，

$$\upsilon(A)=\int_A\frac{d\upsilon'}{dP'}dP=\int_A\frac{d\upsilon}{dp}dp.$$

当 $A\in\mathscr{F}\cap E^c$，$\int_A\frac{d\upsilon}{dp}dp=\left.\begin{cases}0, P(A)=0\\ \infty, P(A)>0\end{cases}\right\}=\upsilon(A)$.

这表明：对 $\forall\ A\in\mathscr{F}\cap E$ 或 $\mathscr{F}\cap E^c$ 结论成立，对于 $\forall\ A\in\mathscr{F}$，

有 $A=A\cap E+A\cap E^c=A_1+A_2$，其中 $A_1=A\cap E\in\mathscr{F}\cap E$，$A_2=A\cap E^c\in\mathscr{F}\cap E^c$，

故
$$\upsilon(A)=\upsilon(A_1)+\upsilon(A_2)=\int_{A_1}\frac{d\upsilon}{dP}dP+\int_{A_2}\frac{d\upsilon}{dP}dP$$
$$=\int_A\frac{d\upsilon}{dp}dp.$$

如果 υ 是 σ-有限的，则 $\Omega\in\mathscr{D}$，即 $E=\Omega$. 于是，按 R-N 定理：$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P}$是$(\mathrm{mod}P)$有限的.

定理 2.2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数，X 为一个 $\mathscr{F}$-可测函数，则有

(i)若 EX 存在，则必存在某个 $\mathscr{G}$-可测函数 Y，使得

$$\int_A Y\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{G}); \tag{2.2.4}$$

(ii)假定 $E|X|<\infty$. Z 为 $\mathscr{G}$-可测函数且 $E|Z|<\infty$. $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的一个 π-类，$\Omega\in\mathscr{D}$，且

$$\int_A Z\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{D}).$$

若 $\mathscr{G}=\sigma(\mathscr{D})$，则必有 $Z=E(X/\mathscr{G}) \quad (\mathrm{mod}P)$.

证 首先证明结论(i). 不妨设 $X\geqslant 0 \quad (\mathrm{mod}P)$. 定义：

$$\upsilon(A)=\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall\ A\in\mathscr{G}) \quad P'=P|_{\mathscr{G}},$$

则按引理 2.2.2，$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P'}$存在，且 $\mathscr{G}$-可测，令

$$Y=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P'}, & \text{当}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P'}<\infty\text{时};\\ \infty, & \text{否则};\end{cases}$$

则 Y 是 $\mathscr{G}$-可测的. 由同一引理可得(2.2.4)成立.

现在证明结论(ii). 令

$$\mathscr{A}=\{A;A\in\mathscr{F},\int_A Z\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P\},$$

则 $\mathscr{D}\subset\mathscr{A}$. 若 $\mathscr{A}$ 为 λ-类，则按定理 1.2.1，有 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A}$. 从而，对$\forall\ A\in\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{G}$，有

$$\int_A Z\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P.$$

从而，得结论(ii). 那么剩下的问题就是验证 $\mathscr{A}$ 为一个 λ-类. 但这是显然的.

推论 2.2.1 设 $\mathscr{G}_i$，$i=1,2$，为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数，X,Y 为可

积变量．

(i)若 $\sigma(X)$ 独立于 $\mathscr{G}_1$，则

$$E(X/\mathscr{G}_1)=EX \quad (\text{a.c}); \qquad (2.2.5)$$

(ii)若对 $\forall\ A_i\in\mathscr{G}_i, i=1,2$，有 $\int_{A_1A_2} X\mathrm{d}P=\int_{A_1A_2} Y\mathrm{d}P$，则

$$E(X/\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2))=E(Y/\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)). \qquad (2.2.6)$$

证 $\sigma(X)$ 独立于 $\mathscr{G}_1\Longrightarrow$ 对 $\forall\ A\in\mathscr{G}_1$.

$$\int_A E(X/\mathscr{G}_1)\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P=E(\chi_A X)=E\chi_A EX=\int_A EX\mathrm{d}P.$$

注意：EX 为常数，自然 $\mathscr{G}_1$-可测，于是按定理 2.2.3 得(2.2.5)式.

现令 $\mathscr{D}=\{D:D=A_1\cap A_2, A_i\in\mathscr{G}_i, i=1,2\}$，则 $\mathscr{D}$ 为 π-类.

显然，$\Omega\in\mathscr{D}$ 且 $\int_D X\mathrm{d}P=\int_D Y\mathrm{d}P \quad (\forall\ D\in\mathscr{D})$. 按定理 2.2.1，若 $\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)=\sigma(\mathscr{D})$，则(2.2.6)式成立．

对 $\forall\ A\in\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2$，有 $A_i\in\mathscr{G}_i, i=1,2$，使得

$$A=A_1+A_2=(A_1-A_1A_2)+(A_2-A_1A_2)+A_1A_2.$$

因 $A_1\cdot A_2, \Omega\cdot A_i\in\mathscr{D} \quad (i=1,2)$，而有 $A_i-A_1A_2\in\sigma(\mathscr{D}) \quad (i=1,2)$. 于是，$A\in\sigma(\mathscr{D})$，即 $\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2\subset(\sigma\mathscr{D})$. 由此即知

$$\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)\subset\sigma(\mathscr{D}).$$

显然，$\sigma(\mathscr{D})\subset\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)$. 故 $\sigma(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)$.

推论 2.2.2 设 X 为 $(\Omega,\mathscr{F})\longrightarrow(\mathbf{R}^m,\mathscr{B}^m)$ 的随机矢量，Y 为 $(\Omega,\mathscr{F})\longrightarrow(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$ 的随矢点量，且 X,Y 相互独立．f 为 $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$ 的 Rorel 函数，且 $Ef(X,Y)$ 存在，若

$$g(x)=\begin{cases}Ef(x,Y), & \text{当 } Ef(x,Y)\text{ 存在时},\\ 0, & \text{否则} \quad (\forall\ x\in\mathbf{R}^m),\end{cases}$$

则 g 是 $\mathbf{R}^m\longrightarrow\mathbf{R}$ 的 Rorel 函数，且

$$g(X)=E(f(X,Y)/\sigma(X)). \qquad (2.2.7)$$

证 让 $F_x(x)$、$F_y(y)$、$F_{xy}(x,y)$ 分别表示 $X,Y,(X,Y)$ 的分布，对 $\forall\ x\in\mathbf{R}^m$，$f(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 Rorel 函数．按 Fubini 定理，可有

$$g^{\pm}(x)=Ef^{\pm}(x,Y)=\int_{R^n}f^{\pm}(x,y)\mathrm{d}F_y(y),$$

且 $g^{\pm}(x)$为 R^m 上的 Rorel 函数，令

$$D^c=\{x:x\in\mathbf{R}^m,g^+(x)=\infty=g^-(x)\},$$

则 D^c 为 Borel 集．从而，$g(x)=(g^+(x)-g^-(x))\chi_D(x)$为 Borel 函数．于是，$g(X)$是 $\sigma(X)$-可测的．

注意到：$|Ef(X,Y)|\leqslant\infty$，X,Y 独立以及 Fubini 定理，有

$$\begin{aligned}Ef(X,Y)&=\int_{\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}F_{xy}(x,y)\\&=\int_{\mathbf{R}^m}\int_{\mathbf{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}F_y(y)\mathrm{d}F_x(x)\\&=\int_{\mathbf{R}^m}g(x)\mathrm{d}F_x(x),\end{aligned}$$

因此，$|Eg(X)|\leqslant\infty$.

对$\forall\ A\in\sigma(X)$，$\exists\ B\in\mathscr{B}^m$，$\ni A=\{X\in B\}$．从而

$$\begin{aligned}\int_A g^{\pm}(X)\mathrm{d}P&=\int_B g^{\pm}(x)\mathrm{d}F_x(x)\\&=\int_B\int_{\mathbf{R}^n}f^{\pm}(x,y)\mathrm{d}F_y(y)\mathrm{d}F_x(x)\\&=\int_{B\times\mathbf{R}^n}f^{\pm}(x,y)\mathrm{d}F_{x,y}(x,y)\\&=\int_A f^{\pm}(X,Y)\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

于是，$$\int_A g(X)\mathrm{d}P=\int_A f(X,Y)\mathrm{d}P,\forall\ A\in\sigma(X).$$

故 $$g(X)=E(f(X,Y)/\sigma(X)).$$

§3 条件期望的基本性质

假定$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一已知的概率空间，让 $\mathscr{G},\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 等表示 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数．记

$$M=\{X:X\text{ 是 }\mathscr{F}\text{-可测的，且}|EX|\leqslant\infty\}.$$

下面的关系定义 M 上的算子 T 及 T_i：

$$\mathrm{T}X=E(X/\mathscr{G}),\forall\ X\in M;\tag{2.3.1}$$

$$\mathrm{T}_i X=E(X/\mathscr{G}_1),\forall\ X\in M.\tag{2.3.2}$$

引理 2.3.1 算子 T 具有下列简单性质：

(i)$\mathrm{T}1=1,\mathrm{T}(CX)=C\mathrm{T}X$ $(\forall\ X\in M)$，其中 C 为常数；

(ii)$\mathrm{T}(X+Y)=\mathrm{T}X+\mathrm{T}Y$ 其中 $X,Y\in M$，且 $E|X|<\infty$；

(iii)$\mathrm{T}X\geqslant 0$，其中 $X\in M$，且$\geqslant 0$；

(iv)$\mathrm{T}X=X$，其中 $X\in M$，且 X 是 $\mathscr{G}$-可测的；

(v)$\mathrm{T}X=\mathrm{E}X$，其中 $X\in M$，且 $\sigma(X)$ 与 $\mathscr{G}$ 独立；

(vi)$\mathrm{T}_1(\mathrm{T}_2X)=\mathrm{T}_1X$，其中 $X\in M,\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$； (2.3.3)

(vii)$EX=E(\mathrm{T}X)\quad\forall\ X\in M.$ (2.3.4)

此引理中的各条均可通过条件期望的定义来证明．注意：在上列各关系中，省去了“modp”的注明．

(一)收敛性定理

设 $Y,X_n,n\geqslant 1$，均为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，且 $E|Y|<\infty$.

定理 2.3.1 （单调收敛定理） 若 $Y\leqslant X_n$ $(n\geqslant 1)$，且 $X_n\uparrow X$ (a.c)，则

$$\mathrm{T}X_n\uparrow\mathrm{T}X(\mathrm{a.c}).$$

证 按引理 2.3.1，$X_n\uparrow=X\Longrightarrow\mathrm{T}X_n\uparrow$，因此，$\mathrm{T}X_n\uparrow Z$ (a.c)．由可测函数的极限保持其可测性不变知：Z 是 $\mathscr{G}$-可测的．现要证明：$Z=\mathrm{T}X$.

事实上，对$\forall\ A\in\mathscr{G}$，按照可测函数的单调收敛定理，有

$$\begin{aligned}\int_A(Z-Y)\mathrm{dP}&=\int_A\lim_{n\to\infty}T(X_n-Y)\mathrm{d}P=\lim_{n\to\infty}\int_A T(X_n-Y)\mathrm{d}P\\&=\lim_{n\to\infty}\int_A(X_n-Y)\mathrm{d}P=\int_A\lim_{n\to\infty}(X_n-Y)\mathrm{d}P\\&=\int_A(X-Y)\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

于是

$$\int_A Z\mathrm{d}P = \int_A X\mathrm{d}P, \forall\ A \in \mathscr{G}.$$

定理 2.3.2 （Fatou 引理） 若 $Y \leqslant X_n \quad (n \geqslant 1)$，则

$$\mathrm{T}(\underline{\lim} X_n) \leqslant \underline{\lim} \mathrm{T} X_n \quad (\text{a.c}).$$

证 令 $Y_n = \inf\limits_{k \geqslant n} X_n$. 则 $Y \leqslant Y_n, n \geqslant 1$，且

$$Y_n \uparrow \lim_{n\to\infty} Y_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \quad (\text{a.c}).$$

对 $\forall\ k \geqslant n$，有 $\mathrm{T}Y_n \leqslant \mathrm{T}X_k$，从而 $\mathrm{T}Y_n \leqslant \inf\limits_{k \geqslant n} \mathrm{T}X_k$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}Y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathrm{T}X_n.$$

注意：$\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 满足单调收敛定理的条件，因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}Y_n = \mathrm{T}(\lim_{n\to\infty} Y_n) = \mathrm{T}(\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n),$$

故

$$\mathrm{T}(\underline{\lim} x_n) \leqslant \underline{\lim} \mathrm{T}X_n.$$

定理 2.3.3 （Lebesque 控制收敛定理） 若 $X_n \xrightarrow{\text{a.c.}} X$，且 $|X_n| \leqslant |Y| \quad (n \geqslant 1)$，则$\lim \mathrm{T}X_n = \mathrm{T}X \quad (\text{a.c})$.

证 $|X_n| \leqslant |Y| \Longrightarrow -|Y| \leqslant X_n, -|Y| \leqslant -X_n \quad (n > 1)$，于是，对于$\{X_n, n \geqslant 1\}$和$\{-X_n, n \geqslant 1\}$均可引用 Fatou 引理．这就得到

$$\pm \mathrm{T}X = \mathrm{T}(\pm X) \leqslant \underline{\lim} \mathrm{T}(\pm X_n) = \underline{\lim}(\pm \mathrm{T}X_n)$$

$$-\mathrm{T}X \leqslant -\overline{\lim} \mathrm{T}X_n, \mathrm{T}X \leqslant \underline{\lim}(\pm \mathrm{T}X_n).$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim} \mathrm{T}X_n \leqslant \mathrm{T}X \leqslant \underline{\lim} \mathrm{T}X_n,$$

故

$$\mathrm{T}X = \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}X_n.$$

注 1 以上各定理中单调收敛定理是最基本的，在应用此定理时，条件“$Y \leqslant X_n \quad (n \geqslant 1) \quad (\text{a.c})$”必须保证．否则，就会出现谬误．例如，考虑如下问题：设 $\Omega = [0,1]$，$\mathscr{F} = \mathscr{B} \cap \Omega$，概率测度 P 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的 Lebesque 测度．让

$$A_{n,i} = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right], 1 \leqslant i \leqslant 2^n,$$

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 2^n, & \text{当 } \omega \in A_{n1} \text{ 时}; \\ 0, & \text{其它} \quad (n \geqslant 1); \end{cases}$$

那么 $A_{n1}=\bigcup_{k=n}^{\infty} A_{k+1,2}, A_{k+1,2}\cap A_{l+1,2}=\varnothing(k\neq l). P(A_{n,i})=2^{-n},$

$$1\leqslant i\leqslant 2^{n}.$$

$$\sup\{\xi_k(\omega),k\geqslant n\}=\begin{cases}2^{l}, & \text{当 } \omega\in A_{l+1,2} \text{ 且 } l\geqslant n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \omega\in A_{l+1,2} \text{ 且 } l< n \text{ 或 } \omega\in A_{n,1}^{c} \text{ 时},\end{cases}$$

于是， $E(\sup_{k\geqslant n}\xi_k)=\left(\int_{\bigcup_{l=1}^{n-1}A_{l+1,2}}+\int_{\bigcup_{l=n}^{\infty}A_{l+1,2}}+\int_{A_{n,1}^{c}}\right)\sup_{k\geqslant n}\xi_k \mathrm{d}P$

$$=\sum_{l=n}^{\infty}\int_{A_{l+1,2}}\sup_{k\geqslant n}\xi_k \mathrm{d}P=\sum_{l=n}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty.$$

令 $X_n=-\sup_{k\geqslant n}\xi_k$，则 $X_n\uparrow$，但不存在可积变量 Y，使得 $Y\leqslant X_n$ $(n\geqslant 1)$. 因此，单调收敛定理的条件不满足. 这时，由于 $\lim_{n\to\infty}Ex_n=-\infty$ 和 $E(\lim_{n\to\infty}x_n)=0$，可见，单调收敛定理的结论不成立. 这个事实表明：条件"$Y\leqslant X_n(\mathrm{mod}\,p)$ $(n\geqslant 1)$"在引用这个定理时必须保证.

(二)分离性定理

定理 2.3.4 假设

(i)X,Y 为 r.v，且 $|EX|\leqslant\infty$，即 $X\in M$，

(ii)Y 是 $\mathscr{G}$-可测的 r.v，且 $XY\in M$，

则
$$\mathrm{T}(XY)=Y\mathrm{T}X. \tag{2.3.5}$$

证 不妨设 $X\geqslant 0,Y\geqslant 0$，因为所得结论可分别用于 X,Y 的正部和负部.

令 $\upsilon(A)=\int_A XY\mathrm{d}P,\mu(A)=\int_A X\mathrm{d}P\quad(\forall A\in\mathscr{F})$，则 υ,μ 均为 P-连续测度. 让 $\upsilon'=\upsilon|\mathscr{G},\mu'=\mu|\mathscr{G},P'=P|\mathscr{G}$ 则由引理 2.2.2 和定理 2.2.1，有

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon'}{\mathrm{d}P'}=\mathrm{T}(XXY),\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}P'}=\mathrm{T}X,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}=X.$$

注意
$$\int_A Y\mathrm{d}\mu'=\int_A Y\mathrm{d}\mu\quad(\forall A\in\mathscr{G}),$$

$$\int_A Y\mathrm{d}\mu'=\int_A Y\frac{\mathrm{d}\mu'}{\mathrm{d}P'}\mathrm{d}P'=\int_A Y\mathrm{T}X\mathrm{d}P'$$

$$= \int_A YTX\mathrm{d}P \quad (\forall\ A \in \mathscr{G}).$$

$$\int_A Y\mathrm{d}\mu = \int_A Y \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}\mathrm{d}P = \int_A XY\mathrm{d}P \quad (\forall\ A \in \mathscr{F})$$

$$\Longrightarrow \int_A XY\mathrm{d}P = \int_A YTX\mathrm{d}P \quad (\forall\ A \in \mathscr{G}).$$

由假设,YTX 是 $\mathscr{G}$-可测的,故 $YTX = \mathrm{T}(YX)$.

(三)Jensen 不等式

定理 2.3.5 设 $X, Y \in M$,$\mathrm{T}Y$ 为 r.v,$g(x)$是 R 上的有限下凸函数,且$|Eg(Y)| \leqslant \infty$. 若

(i)$X = \mathrm{T}Y$ (a.c),或

(ii)$X \leqslant \mathrm{T}Y$ (a.c),且 $g(x)$,$x \in R$,是单调不减的,

则

$$g(X) \leqslant \mathrm{T}g(Y) \quad (\text{a.c}). \tag{2.3.6}$$

证 因在条件(ii)下的结论可直接由在条件(i)下的结论推出. 因此,只需要证明在条件(i)下的结论. 为此,定义

$$g^*(s) = \lim_{t \to s+0} \frac{g(t) - g(s)}{t - s}, -\infty < s < \infty.$$

对于下凸函数 g,必有

$$g(t) \geqslant g(s) + (t - s)g^*(s), -\infty < s, t < \infty.$$

注意:$\mathrm{T}Y$ 是(a.c)有限的,于是,在上式中让 $t = Y$,$s = \mathrm{T}Y$,即可得

$$g(Y) \geqslant g(\mathrm{T}Y) + (Y - \mathrm{T}Y)g^*(\mathrm{T}Y) \quad (\text{a.c}).$$

将上式两边作用算子 T,并注意到 $\mathrm{T}Y$,$g(\mathrm{T}Y)$和 $g^*(\mathrm{T}Y)$均是 $\mathscr{G}$-可测的,就能得到:$\mathrm{T}(g(Y)) \geqslant g(\mathrm{T}Y)$. 由此及条件(i)推出(2.3.6)式成立.

两个常用的推论:

推论 2.3.1 $(\mathrm{T}|X|)^r \leqslant T(|X|^r) \quad (\forall\ r \geqslant 1)$.

推论 2.3.2 $a \vee \mathrm{T}X \leqslant \mathrm{T}(a \vee X) \quad (\forall\ a \in \mathbf{R})$.

(四)条件期望的表现

定理 2.3.6 设 $X \in M$,Y 为 r.v,则

$$E(X/\sigma(Y))=g(Y)\quad (\text{a.c}),\tag{2.3.7}$$

其中，g 为 Borel 函数，且由下式决定：

$$\int_B g\mathrm{d}P_y=\int_{y^{-1}(B)}X\mathrm{d}P\quad \forall\ B\in\mathscr{B}.$$

这里 $P_y(B)=P\{\omega:y(\omega)\in B\}=P(Y^{-1}(B))\quad(\forall\ B\in\mathscr{B})$.

证 (2.3.7)式定义的 g 是 Borel 函数这一点已由定义 1.3.3 解决．现在的问题是如何确定这个函数 g.

在 $\mathscr{B}$ 上定义如下广义测度

$$\upsilon(B)=\int_{R^{-1}(B)}X\mathrm{d}P,\forall\ B\in\mathscr{B}.$$

由假设知：υ 是$(R,\mathscr{B})$上的广义测度无疑，且是 P_y-连续的，按引理 2.2.2，$\exists$ $\mathscr{B}$-可测函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}P_y}$，使得

$$\upsilon(B)=\int_B g(x)P_y(\mathrm{d}x),\forall\ B\in\mathscr{B}.$$

注意 $$\int_B g(x)P_y(\mathrm{d}x)=\int_{y^{-1}(B)}g(y(\omega))P(\mathrm{d}\omega)\quad(\forall\ B\in\mathscr{B}),$$

于是

$$\int_{Y^{-1}(B)}g(Y(\omega))P(\mathrm{d}\omega)=\int_{Y^{-1}(B)}X\mathrm{d}P,\forall\ B\in\mathscr{B}.$$

又$\forall\ A\in\sigma(Y)$，$\exists$ $B\in\mathscr{B}$，使得 $A=Y^{-1}(B)$，故

$$\int_A g(Y)\mathrm{d}p=\int_A X\mathrm{d}P,\forall\ A\in\sigma(Y),$$

即 $$g(Y)=E(X/\sigma(Y)).$$

正是由于公式(2.3.7)成立，人们常把条件期望 $E(X/\sigma(Y))$ 简写为 $E(X/Y)$，类似地也有

$$E(X/Y_1,\cdots,Y_n)\triangleq E(X/\sigma(Y_1,\cdots,Y_n)),$$

$$E(X/Y_t,t\in I)\triangleq E(X/\sigma(Y_t,t\in I)).$$

按定理 1.3.4，$E(X/Y_t,t\in I)$是 $R^I=\{x:x_t\in R,t\in I\}$上的泛函数.

例 2.3.1 设 X 为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v，且 $EX^2<\infty$. $Y_i,1\leqslant i\leqslant n$ 为随机变量列．$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Eorel 函数，且 $E\varphi^2(Y_1,\cdots,Y_n)<\infty$，用 $\Phi^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$表示由这样的 φ 构成的集

合．若∃ $\varphi_0\in\Phi^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$，使得

$$E(X-\varphi_0)^2\leqslant E(X-\varphi)^2,\forall\ \varphi\in\Phi^2(\Omega,R^2),$$

则称 φ_0 为 X 的最小均方估计，而且

$$\varphi_0(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)=E(X/Y_1,Y_2,\cdots,Y_n). \qquad (2.3.8)$$

证 对∀ $\varphi\in\Phi^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}&E[\varphi(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)(X-E(X/Y_1,Y_2,\cdots,Y_n))]\\&\quad=E\varphi(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)E(X-E(X/Y_1,Y_2,\cdots,Y_n))=0;\\&E(X-\varphi)^2=E(X-\psi_0+\psi_0-\psi)^2\\&\quad=E(X-\psi_0)^2+2E((X-\psi_0)(\psi_0-\psi))+E(\psi_0-\psi)^2\\&\quad=E(X-\psi_0)^2+E(\psi_0-\psi)^2\geqslant E(X-\psi_0)^2.\end{aligned}$$

可见，(2.3.8)式定义的 ψ_0 是 X 在 $\Phi^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$中的最小均方估计．

§4 条件概率

在例 2.2.3 中，已经提到，条件概率是条件期望的特例，它可以定义如下：

定义 2.4.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数．令

$$P(A|\mathscr{G})=E(\chi_A|\mathscr{G})\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}),$$

则称 $P(A|\mathscr{G})$为事件 A 在条件 $\mathscr{G}$ 下的条件概率．

上述条件概率具有下列特点：

(i)$P(A|\mathscr{G})$是 $\mathscr{G}$-可测的，其中 $A\in\mathscr{F}$；

(ii)$P(A|\mathscr{G})(\omega)$对固定的 $\omega\in\Omega$ 以概率 1 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度；

(iii) $\int_B P(A|\mathscr{G})\mathrm{d}P=P(A\cdot B)\quad(\forall\ B\in\mathscr{G})$.

现在，提这样一个问题：如果令

$$h(\omega,A)=P(A|\mathscr{G}),$$

则二元函数 h 为一个具有上述两个特性的条件概率．那么，什么

样的二元函数 $h(\omega,A)$才能成为条件概率呢？

定义 2.4.2 如果二元函数 $h(\omega,A),(\omega,A)\in\Omega\times\mathscr{F}$，具有上述特性(i)～(iii)，则称它为正测函数．

假如 $h(\omega,A),(\omega,A)\in\Omega\times\mathscr{F}$ 为正则条件概率，即存在子 σ-代数 $\mathscr{G}$，使得 $h(\omega,A)=P(A|\mathscr{G})$，则

$$E(X|\mathscr{G})=\int_{\Omega}X(\omega')P(\mathrm{d}\omega'|\mathscr{G})=\int_{\Omega}X(\omega')h(\omega,\mathrm{d}\omega').$$

正则性条件可稍微放松一点．

定义 2.4.3 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数，$Q(\omega,B)$是定义在 $\Omega\times\mathscr{B}$ 上的二元函数．若

(i)对固定的 $B\in\mathscr{B}$，$Q(\omega,B)$是 $\mathscr{G}$-可测的；

(ii)对固定的 $\omega\in\Omega$，$Q(\omega,B)$以概率 1 为 $\mathscr{B}$ 上的测度；

则称 $Q(\omega,B),(\omega,B)\in\Omega\times\mathscr{B}$ 为正则函数．

例如，设S是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的r.v，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$中的子σ-代数．定义

$$Q(\omega,B)=P(S\in B|\mathscr{G})\quad(\forall\ B\in\mathscr{B},\omega\in\Omega),\tag{2.4.1}$$

则 $Q(\omega,B)$为 S 在条件 $\mathscr{G}$ 下的正则条件概率．

证 $A=S^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:S(\omega)\in B\}\in\sigma(S)\quad(\forall\ B\in\mathscr{B})$，令

$$Q'(\omega,A)=Q(\omega,B),(B=S(A),A\in\sigma(S)),$$

那么，$Q'(\omega,A)$是定义在 $\Omega\times\sigma(S)$上的正则函数．

注意：这里构作正则函数 $Q'(\omega,A)$的不同点在于：用 $\sigma(S)$代替了 $\mathscr{F}$，由此可见，定义 2.4.2 和 2.4.3 在实值上是一致的，只是定义域有所不同．

以后涉及的条件概率均是正则的．

条件概率与条件期望之间具有相互表示的关系，假如，S 是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v.，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数，而 Y 是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P_s)$上的 r.v.，那么

$$E_s(Y|\mathscr{G})=\int_R yQ(\omega,\mathrm{d}y),$$

其中，Q 由(2.4.1)定义．

第三章　停　　时

停时理论是随机分析的基本内容之一．在其中，最优停时问题具有很强的现实意义．

本章所采用的某些符号定义如下：

$N=\{1,2,\cdots,\bar{n}\}$或$\{1,2,\cdots\}$（不含∞在内）；

$\overline{N}=\{1,2,\cdots,\bar{n}\}$或$\{1,2,\cdots,\infty\}$（含$\infty$在内）；

$T=[0,\bar{t}]$或$[0,\infty)$；

$\overline{T}=[0,\bar{t}]$或$[0,\infty]$.

上述集合中的$\bar{n}$和$\bar{t}$分别为正整数和有限实数．$(\Omega,\mathscr{F})$表示某个可测空间，$(\Omega,\mathscr{F},P)$表示某个完全概率空间．$\{\mathscr{F}_k,k\in\mathbf{N}\}$和$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$均表示$\mathscr{F}$中的$\sigma$-代数流，即

$$\mathscr{F}_{t_1}\subseteq\mathscr{F}_{t_2}\quad(\forall\ t_1,t_2\in N\text{ 或 }T,\text{且 }t_1<t_2).$$

此外，在一般情形下采用希腊字母τ,σ,ν等表示定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的停时．有时也采用带下标的希腊字母表示不同的停时．

§1　停时概念

（一）具有参数集N的停时

定义 3.1.1　设$\tau=\tau(\omega)$为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的取值于$\overline{N}$的可测函数．若对$\forall\ k\in\mathbf{N}$，有

$(\tau=k)\in\mathscr{F}_k$或$(\tau\leqslant k)\in\mathscr{F}_k$，则称$\tau$为$\mathscr{F}_\cdot$-或 Markov 时．

如果$P(\tau=\infty)=0$，称τ为有限停时．

如果$P(\tau=\infty)>0$，称τ为（不完全）停时．

例如，让 $\tau(\omega)=k_0\in\mathbf{N}$，(a.c)，则由此定义的 τ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时．这个结论不难由上述定义得出．

相应于停时 τ 的 σ-代数 $\mathscr{F}_\tau$ 定义如下：

$$\mathscr{F}_\tau=\{A:A\in\mathscr{F},A\cap(\tau=k)\in\mathscr{F}_k,k\in\mathbf{N}\}. \qquad (3.1.1)$$

引理 3.1.1 设 τ,τ_1,τ_2 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时，$\mathscr{F}_{\tau_i}$ 由(3.1.1)式定义($i=1,2$)，则

(i) $\mathscr{F}_\tau$ 为 σ-代数；

(ii) τ 是 $\mathscr{F}_\tau$-可测的；

(iii) $\mathscr{F}_\tau\cap(\tau\leqslant k)\subset\mathscr{F}_k \quad (\forall\ k\in\mathbf{N})$．特别地

$$\mathscr{F}_\tau\cap(\tau=k)=\mathscr{F}_k\cap(\tau=k);$$

(iv) 若 $\tau_1\leqslant\tau_2$ (a.c)，则 $\mathscr{F}_{\tau_1}\subseteq\mathscr{F}_{\tau_2}$．

证 按 $\mathscr{F}_\tau$ 之定义，$\varnothing,\Omega\in\mathscr{F}_\tau$，若 $A\in\mathscr{F}_\tau$，则

$$A^c\cap(\tau=k)=(\tau=k)-A\cap(\tau=k)\in\mathscr{F}_k \quad (\forall\ k\in\mathbf{N}),$$

从而，$A^c\in\mathscr{F}_\tau$．假定 $A_i\in\mathscr{F}_\tau,i=1,2,\cdots$，且 $A=\bigcup_i A_i$，则

$$A\cap(\tau=k)=\bigcup_i A_i\cap(\tau=k)\in\mathscr{F}_k \quad \forall\ k\in\mathbf{N}.$$

从而，$A\in\mathscr{F}_\tau$．故 $\mathscr{F}_\tau$ 为 σ-代数．

注意：$\sigma(\tau)\subset\mathscr{F}_\tau$，从而得结论(ii)．

结论(iii)由 $\mathscr{F}_\tau$ 之定义可直接推出．

下证结论(iv)．

对 $\forall\ A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$，有 $A_k=A\cap(\tau_1\leqslant k)\in\mathscr{F}_k \quad (\forall\ k\in\mathbf{N})$．注意，按条件 $\tau_1\leqslant\tau_2$ (a.c)：$(\tau_2\leqslant k)\subseteq(\tau_1\leqslant k) \quad (\forall\ k\in\mathbf{N})$．于是

$$\begin{aligned}A\cap(\tau_2\leqslant k)&=A\cap[(\tau_1\leqslant k)\cap(\tau_2\leqslant k)]\\&=A_k\cap(\tau_2\leqslant k)\in\mathscr{F}_k \quad (\forall\ k\in\mathbf{N}),\end{aligned}$$

由此即得 $A\in\mathscr{F}_{\tau_2}$，故 $\mathscr{F}_{\tau_1}\subseteq\mathscr{F}_{\tau_2}$．

注 1 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 的定义，另有一种形式：

$$\mathscr{F}'_\tau=\{A:A\in\sigma(\bigcup_{i\in N}\mathscr{F}_i),A\cap(\tau=k)\in\mathscr{F}_k,k\in\mathbf{N}\}. \qquad (3.1.2)$$

显然，有 $\mathscr{F}'_\tau\subseteq\mathscr{F}_\tau$．但反之不一定成立．然而，如果用(3.1.2)式定义的 $\mathscr{F}'_\tau$ 代替引理 3.1.1 中的 $\mathscr{F}_\tau$，则该引理仍成立．因此，以

后关于 $\mathscr{F}_\tau$ 既可由(3.1.1)定义又可由(3.1.2)定义. 有时采用由(3.1.1)式定义的 $\mathscr{F}_\tau$ 比较方便.

(二)具有连续时域的停时

定义 3.1.2 设 $\tau=\tau(\omega)$ 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的可测函数,其值域为 $\bar{T}$. 若对 $\forall\ t\in T$,有

$$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t,$$

则称 τ 为 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$-时. 在某些特定的情形下,有时简写为 $\mathscr{F}$.-时. 若 $P(\tau=\infty)=0$ 或 >0,则分别称 τ 为有限停时或(不完全)停时.

相应于上述定义中的停时 τ 的 σ-代数 $\mathscr{F}_\tau$ 由下式定义:

$$\mathscr{F}_\tau=\{A:A\in\mathscr{F},A\cap(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t,t\in T\}.$$

同样也可以用 $\mathscr{F}_{\bar{t}}$ 代替上式中的 $\mathscr{F}$ 来定义 $\mathscr{F}_\tau$:

$$\mathscr{F}_{\bar{t}}=\sigma(\bigcup_{t_i}\mathscr{F}_{t_i}),\text{其中 } t_i\uparrow\bar{t},\bar{t}=\sup\{t,t\in T\}.$$

显然,引理 3.1.1 对连续时域的情形亦成立. 以后,在引用这条引理时不区别是离散时域还是连续时域这两种情形.

§2 停时的基本性质

为方便计,以下假定:$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$,$T=[0,\infty)$,所涉及的随机变量均定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上,$\{\mathscr{F}_u,u\in K\}$,($K=\mathbf{N}$ 或 T),为 $\mathscr{F}$ 中的 σ-代数流.

引理 3.2.1 若 τ 为 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$-时,则对 $\forall\ t\in T$,有

$$(\tau<t)\in\mathscr{F}_t,(\tau=t)\in\mathscr{F}_t.$$

证 对所有的整数 $k\geqslant1$ 及 $t\in T$,按定义 3.1.2,有

$$(\tau\leqslant t-\frac{1}{k})\in\mathscr{F}_{t-\frac{1}{k}}.$$

这里,若 $t-\frac{1}{k}<0$,则定义 $\mathscr{F}_{t-\frac{1}{k}}=\mathscr{F}_0$.

显然，$(\tau<t)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\tau\leqslant t-\frac{1}{k})\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{F}_{t-\frac{1}{k}}\subset\mathscr{F}_t$. 从而

$$(\tau=t)=(\tau\leqslant t)-(\tau<t)\in\mathscr{F}_t.$$

引理 3.2.2 设 τ_1 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-时. $\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{\tau_1+n},n\in\mathbf{N}$. τ_2 为 $\{\mathscr{G}_n,n\in\mathbf{N}\}$-时. 则 $\tau=\tau_1+\tau_2$ 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-时.

证 此引理的结论等价于：对 $\forall\ m\in\mathbf{N}$，有

$$(\tau=m)=\bigcup_{j=1}^{m-1}\{\tau_1=j,\tau_2=m-j\}\in\mathscr{F}_m. \tag{3.2.1}$$

注意：$(\tau_2=m-j)\in\mathscr{G}_{m-j}=\mathscr{F}_{\tau_1+m-j}$. 对 $\forall\ j<m$，τ_1+m-j 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-时. 从而，按引理 3.1.1(iii)

$$(\tau_1=j)\cap\mathscr{F}_{\tau_1+m-j}=(\tau_1+m-j=m)\cap\mathscr{F}_{\tau_1+m-j}\subset\mathscr{F}_m$$
$$(\forall\ j<m).$$

于是，$(\tau_1=j)\cap(\tau_2=m-j)\in\mathscr{F}_m$，$(\forall\ j\leqslant m)$. 由此即得(3.2.1)式.

推论 3.2.1 如果引理 3.2.1 中的 τ_2 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$-时，则此引理的结论仍然成立.

证 利用 $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_n$ $(\forall\ n\in\mathbf{N})$，立即得此结论.

引理 3.2.3 对于离散时域 N：若 $\tau_i,i=1,2,\cdots$，为 $\mathscr{F}$-时列，则 $\sup_n\tau_n,\inf_n\tau_n,\bar{\tau}=\overline{\lim}\tau_n$ 和 $\underline{\tau}=\underline{\lim}\tau_n$ 均为 $\mathscr{F}$.-时.

证 我们只给出 $\bar{\tau}$ 为 $\mathscr{F}_0$-时的证明.

对 $\forall\ t\in\mathbf{N}$，有

$$(\bar{\tau}\leqslant t)=(\inf_{m\geqslant1}\sup_{n\geqslant m}\tau_n\leqslant t)=\bigcup_{m=1}^{\infty}(\sup_{n\geqslant m}\tau_n\leqslant t)$$
$$=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(\tau_n\leqslant t)\in\mathscr{F}_t.$$

故 $\bar{\tau}$ 为 $\mathscr{F}$.-时.

引理 3.2.4 若 τ,σ 为 $\mathscr{F}$.-时，且 $A=(\tau<\sigma)$ 或 $(\tau>\sigma)$ 或 $(\tau=\sigma)$，则 $A\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

证 如果能证明

$$A=(\tau<\sigma)\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}, \tag{3.2.2}$$

则由对称性可知：$(\tau>\sigma)\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$；由 $(\tau=\sigma)=\{(\tau<\sigma)\cup(\tau>\sigma)\}^c$

知：$(\tau=\sigma)\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$. 下面证明(3.2.2)式成立.

只考虑连续时域 T,离散情形完全类似.

设 $Q=\{\gamma:\gamma$ 为 T 中的有理数$\}$,则

$$A=(\tau<\sigma)=\bigcup_{\gamma\in Q}(\tau\leqslant\gamma,\gamma<\sigma).$$

注意到：$(\tau\wedge\sigma\leqslant t)=(\tau\leqslant t)\cup(\sigma\leqslant t)$，于是

$$\begin{aligned}A\cap(\tau\wedge\sigma\leqslant t)&=A\cap(\tau\leqslant t)+A\cap(\sigma\leqslant t)\\&=A\cap(\tau<t)+A\cap(\sigma<t)+A\cap(\tau=t)\\&\quad+A\cap(\sigma=t)\\&=\bigcup_{\substack{\gamma\in Q\\\gamma<t}}(\tau<\gamma,\gamma<\sigma)+\bigcup_{\substack{\gamma\in Q\\\gamma<t}}(\tau\leqslant\gamma,\gamma<\sigma<t)\\&\quad+(\tau=t,t<\sigma)+(\tau<t,t=\sigma),\end{aligned}$$

故对$\forall\ t\in T$，有 $A\cap(\tau\wedge\sigma\leqslant t)\in\mathscr{F}_t$.

推论 3.2.2 设 Z 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可积变量，τ,σ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，则

$$E(\chi_A Z/\mathscr{F}_\tau)=E(\chi_A Z/\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})=E(\chi_A Z/\mathscr{F}_\sigma),\quad(3.2.3)$$

其中 $A=(\sigma>\tau)$或$(\sigma<\tau)$或$(\sigma=\tau)$.

证 按引理 3.2.3，$\tau\wedge\sigma$ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，由引理 3.1.1 知

$$\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subseteq\mathscr{F}_\tau,\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subseteq\mathscr{F}_\sigma.$$

引理 3.2.4 表明：$A\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$. 于是，$\chi_A$ 是 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$-可测的，更是 $\mathscr{F}_\tau$ 和 $\mathscr{F}_\sigma$-可测的.

注意：在(3.2.3)式中，τ,σ 处于对称地位. 因此，仅需证明(3.2.3)式中的第一个等式.

对$\forall\ B\in\mathscr{F}_\tau$，有 $B\cdot A\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$. $\quad$ (3.2.4)

事实上，为明确计，让 $A=(\tau<\sigma)$，则

$B\cdot A\cdot(\tau\wedge\sigma>t)=B\cdot(\tau<\sigma)(\tau>t)(\sigma>t)=B_t(\sigma>t)$，其中，$B_t=B\cdot(\tau<\sigma)(\tau>t)\in\mathscr{F}_t$，因为 $B\cdot(\tau<\sigma)\in\mathscr{F}_\tau$. 于是

$$B\cdot A\cdot(\tau\wedge\sigma>t)=B_t(\sigma>t)\in\mathscr{F}_t\quad(\forall\ t\in T).$$

由此即知(3.2.4)式成立.

因此，对$\forall\ B\in\mathscr{F}_\tau$，由于 $A,BA\in\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$，有

$$\int_B \chi_A X \mathrm{d}P = \int_{A\cdot B} X \mathrm{d}P = \int_{A\cdot B} E(Z/\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})\mathrm{d}P$$
$$= \int_B \chi_A E(Z/\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})\mathrm{d}P$$
$$= \int_B E(\chi_A Z/\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})\mathrm{d}P.$$

注意：$E(\chi_A Z/\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})$更是 $\mathscr{F}_\tau$-可测的，故由条件期望之定义及唯一性知：(3.2.4)式中第一式成立．

推论 3.2.3 设 Z 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可积变量，τ 为 $\mathscr{F}_.$-时，则对$\forall\ t\in N$ 或 T，有

$$E(Z/\mathscr{F}_\tau)=E(Z/\mathscr{F})\quad (\text{a.c})，于(\tau=t)上，$$

即
$$E(\chi_t Z/\mathscr{F}_\tau)=E(\chi_t Z/\mathscr{F}_t)\quad (\text{a.c}),\qquad (3.2.5)$$

其中
$$\chi_t(\omega)=\chi_{(\tau=t)}(\omega)\quad (\omega\in\Omega).$$

证 在(3.2.5)式中，让 $\sigma=t$ (a.c)，$A=(\tau=t)$，立即得(3.2.3)式. #

引理 3.2.5 设$\{\xi_n,n\in N\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量列，$\mathscr{F}^\xi_n=\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$n\in N$，为 $\mathscr{F}$ 中的一个 σ-代数流．那么，τ 为 $\mathscr{F}^\xi_.$-时的充要条件是：存在$(R^\infty,\mathscr{B}^\infty)$中的一个不相联的 Borel 柱集列$\{C_n,n\in N\}$，使得

$$(\tau=n)=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in C_n\},n\in\mathbf{N},\qquad (3.2.6)$$

其中柱集 C_n 以 n-维 Borel 集 B_n 为其基．

证 如果 τ 为 $\mathscr{F}^\xi_.$-时，则对$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$(\tau=n)\in\mathscr{F}^\xi_n=\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n).$$

于是，存在 n-维 Borel 集 B_n，使得

$$(\tau=n)=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in B_n\}.$$

让 C'_n 为以 B_n 为基的 Borel 柱集，则对$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$(\tau=n)=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C'_n\}.$$

现在，让 $C_n=C'_n-\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}C'_j$，则 C_n 为具有 n-维 Borel 基 B_n 的柱集，且不相联，因为$(\tau=n)(\tau=m)=\varnothing\quad(n\neq m)$，(3.2.6)式成立．

反之，假定条件(3.2.6)成立，那么，对$\forall\ n\in\mathbf{N}$，必有

$$(\tau=n)=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C_n\}=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in B_n\}\in\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n).$$

从而 τ 为 $\mathscr{F}^{\xi}_{\cdot}$-时．

定义 3.2.1 若 σ-代数流$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$满足条件：

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{\substack{u>t\\u\in T}}\mathscr{F}_u,\forall\ t\in T,$$

则称 $\mathscr{F}$ 为右连续 σ-代数流．

引理 3.2.6 设 $\mathscr{F}_{\cdot}$ 为右连续 σ-代数流．$\tau=\tau(\omega)$是取值于 $\overline{T}$ 的 $\mathscr{F}$-可测函数，则 τ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时的充要条件是

$$(\tau<t)\in\mathscr{F}_t,\quad\forall\ t\in T.\tag{3.2.7}$$

证 必要性是引理 3.2.1 的结果，往下证明充分性．

对$\forall\ t\in T$，由 $\mathscr{F}_t,t\in T$ 的右连续性，有

$$(\tau\leqslant t)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\tau<t+\frac{1}{k}\right)\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathscr{F}_{t+\frac{1}{k}}=\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t,$$

故由定义 3.1.2，τ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时．

推论 3.2.4 设 $\mathscr{F}_{\cdot}$ 为右连续 σ-代数流．$\tau_i,i=1,2,\cdots$，为取值于 $\overline{T}$ 且满足条件(3.2.7)式的 $\mathscr{F}$-可测函数，则引理 3.2.3 之结论成立．

证 按引理 3.2.6，$\tau_i,i=1,2,\cdots$，均为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时，由此即知引理 3.2.3 对$\{\tau_i,i\geqslant1\}$成立．

假定 G,F 分别为 T 中的开集和闭集．记

$$C_\omega(B)=\{t:t\in T,\xi(t,\omega)\in B\}\quad(\omega\in\Omega,B\in\mathscr{B}),$$

其中，$\xi(t),t\in T$，为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程．定义：

$$\sigma=\begin{cases}\inf\{t\in T:t\in C_\omega(G)\}, & \text{当 } C_\omega \text{ 不空时},\\ \infty, & \text{否则};\end{cases}\tag{3.2.8}$$

$$\tau=\begin{cases}\inf\{t\in T:t\in C_\omega(F)\}, & \text{当 } C_\omega(F) \text{ 不空时},\\ \infty, & \text{否则}.\end{cases}\tag{3.2.9}$$

引理 3.2.7 假设 $\xi(t),t\in T$，为右连续过程，$\mathscr{F}_{\cdot}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的右连续 σ-代数流，且 $\xi(\cdot)$适应于 $\mathscr{F}_{\cdot}$，则 σ 和 τ 均为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时．

证 因 G 为开集，所以 G^c 为闭集，注意 $\xi(\cdot)$右连续．于是

由右连续过程是完完可分的知，对$\forall\ t\in T$，有

$$(\sigma\geqslant t)=\{\omega:\xi(s)\in G^c,s<t\}=\bigcap_{\substack{\gamma\in Q\\ \gamma<t}}\{\xi(\gamma)\in G^c\},$$

其中，$Q=\{\gamma:\gamma$ 为 T 中的有理数$\}$.

注意：由 $\xi(t)$的可测性知：$\{\xi(\gamma)\in G^c\}\in\mathscr{F}_\gamma\subset\mathscr{F}_t\quad(\gamma<t)$. 因此，$(\sigma\geqslant t)\in\mathscr{F}_t$. 从而，$(\sigma<t)\in\mathscr{F}_t$. 按引理 3.2.6，$\sigma$ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时.

对于闭集 F，F^c 为开集，加之 $\xi(t)$的右连续性，有

$$\begin{aligned}(\tau>t)&=\{\xi(s)\in F^c,s\leqslant t\}\\&=\bigcap_{\substack{\gamma\in Q\\ \gamma<t}}\{\xi(\gamma)\in F^c\}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall\ t\in T),\end{aligned}$$

于是，$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t\quad(\forall\ t\in T)$. 由定义 3.1.2 知：$\tau$ 为 $\mathscr{F}^{\cdot}$-时.

引理 3.2.8 设 $\xi(t)$，$t\in T$，为连续过程，

$$\mathscr{F}_t^\xi=\sigma(\xi(u),u\leqslant t)\quad(\forall\ t\in T),$$

则由(3.2.9)定义的 τ 均为 $\mathscr{F}_{\cdot}^\xi$-时.

证 从 F^c 为开集及 $\xi(t)$的连续性中可推出：

$$\begin{aligned}(\tau>t)&=\{\xi(s)\in F^c,s\leqslant t\}\\&=\bigcap_{\substack{\gamma\in Q\\ \gamma\leqslant t}}\{\xi(\gamma)\in F^c\}\in\mathscr{F}_{\cdot}^\xi\text{-}(\forall\ t\in T).\end{aligned}$$

从而，$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t^\xi\quad(\forall\ t\in T)$. 故 τ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}^\xi$-时. #

注 连续过程产生的 σ-代数流不一定左连续也不一定右连续. 因此，不能得出由(3.2.8)式定义的 σ 是否为停时的结论.

§3 停时代换

(一)离散时域情形

设 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$. 并假定以下所涉及的变量均是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上.

定义 3.3.1 如果 ξ_n 为随机变量，且 $\mathscr{F}_n$-可测，其中 $n\in\mathbf{N}$，则

称 $\xi_\cdot$ 为适应于 $\mathscr{F}_\cdot$ 的随机列，记为 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{N}\}$.

注意在此定义中没有考虑下标"∞"的元，如果考虑与 $\overline{N}$ 有关的随机列，则需要引入一个随机元 $(\xi_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，使得 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{\mathbf{N}}\}$ 为一个适应序列．这种随机元的引入方式是多种多样的，但下面给出的这一种比较常用，即定义：

$$\begin{cases}\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup\limits_{k\in N}\mathscr{F}_k);\\ \xi_\infty=\overline{\lim}\xi_n.\end{cases}\tag{3.3.1}$$

那么，不难证明：ξ_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty$-可测的．因此，在由(3.3.1)式引进随机元 $(\xi_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，$\{\mathscr{F}_n,n\in\overline{N}\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的 σ-代数流，而 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{N}\}$ 为适应序列．

现在通过停时代换来定义一个新的可测函数 ξ_τ 并讨论其性质．设 τ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，ξ_∞ 由(3.3.1)式定义，构作函数 ξ_τ 如下：

$$\xi_\tau=\begin{cases}\xi_n,\ \text{当 } \omega\in(\tau=n),n\in N \text{ 时};\\ \xi_\infty,\text{当 } \omega\in(\tau=\infty)\text{时}.\end{cases}\tag{3.3.2}$$

引理 3.3.1 ξ_τ 是 $\mathscr{F}_\tau$-可测的，其中 $\mathscr{F}_\tau$ 由(3.1.1)或(3.1.2)定义．

证 对 $\forall\ B\in\mathscr{B}$，令 $A=\{\xi_\tau\in B\}$，则

$$A\cap(\tau=n)=\{\xi_\tau\in B,\tau=n\}$$
$$=\{\xi_n\in B\}\cap(\tau=n)\in\mathscr{F}_n\quad(\forall\ n\in\mathbf{N}),$$
$$A\cap(\tau=\infty)=\{\xi_\tau\in B,\tau=\infty\}=\{\xi_\infty\in B\}(\tau=\infty)\in\mathscr{F}_\infty,$$

于是，$A\in\mathscr{F}_\infty$．故 $A\in\mathscr{F}_\tau$.

引理 3.3.2 假设 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{\mathbf{N}}\}$ 为适应列，且

(i) τ 为有限停时，或

(ii) τ 为停时而 $\xi_\infty=\overline{\lim}\xi_n$ 为 r. v.，

则 ξ_τ 为 r. v..

证 为使 ξ_τ 为 r. v.，必须 $P(|\xi_\tau|=\infty)=0$.

显然下式成立：

$$P(|\xi_\tau|=\infty)=\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| = \infty, \tau = n) + P(|\xi_\infty| = \infty, \tau = \infty) = P(|\xi_\infty|=\infty, \tau=\infty).$$

于是,引理中的条件(i)或(ii)均保证上式右边为 0.

假设 $\xi_n, n\geqslant 1$,为独立同分布的随机变量列 . $\mathscr{F}_n^\xi=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n), n\geqslant 1$. τ 为 $\mathscr{F}_\cdot^\xi$-时,由引理 3.2.5 知:存在 $\mathscr{B}^\infty$ 中不相联的柱集列 $\{C_n, n\geqslant 1\}$,使得 $\forall\ n\geqslant 1$, C_n 具有 n-维 Borel 基 B_n,且

$$(\tau=n)=\{\omega:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C_n\}.$$

定义 3.3.2 定义如下停时列:

$$\tau^{(1)}=\tau_1=\tau, \tau_k=\sum_{i=1}^{k} \tau^{(i)} \quad (k \geqslant 1), \tag{3.3.3}$$

其中 $$(\tau^{k+1}=n)=\{\omega:(\xi_{\tau_k+1},\xi_{\tau_k+2},\cdots\in C_n)\} \quad (n\geqslant 1),$$

则称 $\tau^{(k)}, k\geqslant 1$ 为停时 τ 的复本 .

引理 3.3.3 假定 τ 为有限停时,则

(i)$\mathscr{F}_\tau^\xi$ 与 $\sigma(\xi_{\tau+1},\xi_{\tau+2},\cdots)$独立;

(ii)$\xi_{\tau+n}, n\geqslant 1$,为独立同分布的 r. v. 列,且分布同于 ξ_1;

(iii)τ 之复本 $\tau^{(n)}, n\geqslant 1$,为独立同分布的 r. v. 列 .

证 假如结论(i)和(ii)成立,则结论(iii)必成立 . 事实上,由(i)知:$\sigma(\tau)$独立于 $\sigma(\xi_{\tau+1},\xi_{\tau+2},\cdots)$. 从定义 3.3.2 中可以推出:$\sigma(\tau^{(n)})\subset(\xi_{\tau+1},\xi_{\tau+2},\cdots)$ $(n\geqslant 2)$. 于是 $\tau^{(1)}$独立于 $\tau^{(n)}$ $(n\geqslant 2)$. 按(ii),$\{\xi_{\tau^{(2)}+n}, n\geqslant 1\}$是独立同分布的 r. v. 列 . 又$\{\tau^{(n)}, n\geqslant 2\}$是 $\tau^{(2)}$的复本 . 因此,将 τ 换成 $\tau^{(1)}$重复上述的作法,立即可知 $\tau^{(2)}$独立于 $\tau^{(n)}, n\geqslant 3$,反复利用这一作法即可证结论(iii). 往下证明结论(i)和(ii).

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为任意实数,$A\in\mathscr{F}_\tau^\xi$,那么

$$P(A\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\})=\sum_{k=1}^{\infty}P(A(\tau=k)\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{k+i}<\lambda_i\})$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} P(A\cdot(\tau = k))\cdot P(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{k+i}<\lambda_i\})$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} P(A\cdot(\tau=k))\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i<\lambda_i\}\right)$$

$$=P(A)\prod_{i=1}^{n}P(\{\xi_i<\lambda_i\}). \tag{3.3.4}$$

在(3.3.4)式中，让 $A=\Omega$，即得

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\}\right)=\prod_{i=1}^{n}P(\{\xi_i<\lambda_i\}),$$

$$P(\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\})=P(\{\xi_i<\lambda_i\}),$$

于是

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\}\right)=\prod_{i=1}^{n}P(\{\xi_{\tau+1}<\lambda_i\}) \quad (n\geqslant 1),$$

$$P\left(A\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\}\right)=P(A)\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{\tau+i}<\lambda_i\}\right) \quad (n\geqslant 1).$$

前一式证明了结论(ii)，后一式证明了结论(i).

定理 3.3.1 （Wald 等式）假设

(i) $\xi_n, n\geqslant 1$，为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上独立同分布的随机变量列，且 $|E\xi_1|\leqslant\infty$；

(ii) $\mathscr{F}_n, n\geqslant 1$，为 σ-代数流，且 $\forall\, n\geqslant 1$，$\mathscr{F}_n\supset\mathscr{F}_n^{\xi}=\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\mathscr{F}_n$ 独立于 $\sigma(\xi_{n+1})$；

(iii) τ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，且 $E\tau<\infty$，

则

$$ES_\tau=E\xi_1\cdot E\tau,$$

其中，$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad (n\geqslant 1)$.

证 注意：$E\tau<\infty \Longrightarrow P(\tau=\infty)=0$.

首先假定 $E|\xi_1|<\infty$ 来证明定理成立.

$$E|S_\tau|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\chi_{(\tau=n)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E\left(\sum_{n=i}^{\infty}|\xi_i|\chi_{(\tau=n)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E(|\xi_i|\chi_{(\tau\geqslant i)}). \tag{3.3.5}$$

因 $(\tau\geqslant i)\in\mathscr{F}_{i-1}, i\geqslant 1$（定义 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$）及条件(i)和(ii)，

而有 $E|S_\tau|\leqslant E|\xi_1|E\tau$. 从而 S_τ 可积，故

$$ES_\tau=\sum_{i=1}^{\infty}E(\xi_i\chi_{(\tau\geqslant i)})=E\xi_1\cdot E\tau.$$

最后，考虑 $|E\xi_1|=\infty$ 的情形．

$|E\xi_1|=\infty$ 意味着：

(i) $E\xi_1^-<\infty, E\xi_1^+=\infty$，或

(ii) $E\xi_1^-=\infty, E\xi_1^+<\infty$.

显然，这两种情形可做类似讨论．因此，只考虑情形(i). 这时，

$$ES_\tau^-=E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i\Big)^-\leqslant E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i^-\Big)=E\xi_1^-\cdot E\tau<\infty.$$

于是，ES_τ 存在，故

$$\begin{aligned}ES_\tau&=E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}(\xi_i^+-\xi_i^-)\Big)=E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i^+\Big)-E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i^-\Big)\\&=E\xi_1^+\cdot E\tau-E\xi_1^-\cdot E\tau=E\xi_1\cdot E\tau.\end{aligned}$$

(二)递进过程的停时代换

可以类似于定义 3.3.1 来定义符号 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$，此符号表明：随机过程 $\xi(\cdot)$ 适应于 σ-代数流 $\mathscr{F}$.

定义 3.3.3 如果随机过程 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 作为二变元 (t,ω) 的函数具有如下可测性：

$$\{(s,\omega):0\leqslant s\leqslant t,\xi(s,\omega)\in B\}\in\mathscr{B}_t\times\mathscr{F}_t \quad (t\in T,B\in\mathscr{B}), \tag{3.3.6}$$

其中，$\mathscr{B}$ 为 R 上的 Borel σ-代数．$\mathscr{B}_t=\mathscr{B}\cap[0,t]$，则称此过程为递进可测过程．

引理 3.3.3 右(或左)连续过程是递进可测的．

证 假定 $\{\xi_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是一个右连续过程，让 $t\in T$ 任意给定．记 $s_{n,k}=\dfrac{k+1}{2^n}\wedge t$. 构作如下右连续过程：

$\xi_n(s)=\xi(s_{n,k},\omega)$，当 $s_{n,k-1}\leqslant s<s_{n,k}, n=1,2,\cdots,k=0,1,2,\cdots$ 时，由 $\xi_t,t\in T$ 的右连续性知

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n(s)=\xi_s \quad (a,c),(s\in[0,t]).$$

注意：$s_{n,k}\leqslant t$ 及 $\{\xi(s_{n,k},\omega)\in B\}\in\mathscr{F}_{s_{n,k}}\subset\mathscr{F}_t$，从而，有

$$\{(s,\omega):s\in[0,t],s_n(s,\omega)\in B\}=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{(s,\omega):s_{n,k-1}\leqslant s<s_{n,k},$$

$\xi(s_{n,k},\omega)\in B\}\in\mathscr{B}_t\times\mathscr{F}_t$.

于是，$\xi_n(\cdot)$的极限 $\xi(\cdot)$满足条件(3.3.6)式．

引理 3.3.4 设 $T=R^+=[0,\infty)$. $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$为递进可测过程，$\tau$ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，且 $P(\tau<\infty)=1$. 则 $\xi(\tau)=\xi(\tau(\omega),\omega)$是 $\mathscr{F}_\tau$-可测的．

证 $\xi(\tau)$为 $\mathscr{F}_\tau$-可测等价于：对$\forall\ B\in\mathscr{B}$，有

$$A\cap(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t \quad (\forall\ t\in T), \tag{3.3.7}$$

其中，$A=\{\omega:\xi(\tau(\omega),\omega)\in B\}$.

记 $\chi_t(\omega)=\begin{cases}1,当\ \tau(\omega)\leqslant t\ 时,\\0,否则.\end{cases}$ 由 τ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时及 $\xi(\cdot)$的递进可测性知：

映射：$\omega\longrightarrow(\chi_t\cdot\tau(\omega),\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F}_t)\longrightarrow([0,t]\times\Omega,\mathscr{B}_t\times\mathscr{F}_t)$可测的．

映射：$(s,\omega)\longrightarrow\xi(s,\omega)$是$([0,t]\times\Omega,\mathscr{B}_t\times\mathscr{F}_t)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})$可测的，于是，复合映射：$\omega\longrightarrow\xi(\chi_t\tau(\omega),\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F}_t)\longrightarrow(\mathbf{R},\mathscr{B})$可测的．由此即知(3.3.7)成立．

推论 3.3.1 若$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$是右(或左)连续的，$\tau$ 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，且 $P(\tau<\infty)=1$，这里，$T=\mathbf{R}^+$. 则 $\xi(\tau)$是 $\mathscr{F}_\tau$-可测的．

证 按引理 3.3.4，$\xi(t),t\in T$，是递进可测的．从而，利用引理 3.3.5 即可得此结论．

§4 最优停时

考虑某人投掷一个均匀的钱币，每次投掷后，他必须为下一次投掷作出停止或继续的决策．假定“1”表示头像，“－1”表示数字

面，让 $\xi_i, i\geqslant 1$，表示投掷者的独立投掷序列，并设 $P(\xi_i=1)=P(\xi_i=-1)=\frac{1}{2}, i\geqslant 1$，如果投掷者在第 n 次投掷后停止，他将获得收益 Y_n. 显然，Y_n 可看作 n 次投掷结果的函数，即

$$Y_n=f_n(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), n\geqslant 1. \qquad (3.4.1)$$

现在，对于投掷者所考虑的问题是：在什么时候停止才能使他所期望的收益 Y_n 最大.

这类问题的一般提法如下：

假设 $\xi_i, i\geqslant 1$，是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的独立同分布的随机变量列，且 $E|\xi_1|<\infty$，让 $N=\{1,2,\cdots\}$，$\mathscr{F}_n^\xi=\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\in N$. 定义：

$$S=\{\tau:\tau \text{ 为有限的 } \mathscr{F}_\cdot^\xi\text{-时，且 } EY_\tau>-\infty\},$$

其中，Y 由(3.4.1)式定义. 那么所谓最优停时就是这么一个问题，是否在有限停时类 S 中存在 τ^*，使得

$$EY_{\tau^*}\geqslant EY_\tau \quad (\forall\ \tau\in S). \qquad (3.4.2)$$

如果这样的 τ^* 存在，则称它为相对于类 S 的最优停时.

引理 3.4.1 假定对 $\forall\ \varepsilon\in\mathbf{R}$，有

(i) $\tau_\varepsilon=\inf\{i:\xi_i\geqslant\varepsilon, i\in N\}$，$\inf\varnothing=\infty$； (3.4.3)

(ii) $p=P(\xi_1\geqslant\varepsilon)>0, q=1-p$；

则 $E\tau_\varepsilon<\infty$，且

$$E\xi_{\tau_\varepsilon}=E(\xi_1-\varepsilon)^+\cdot E\tau_\varepsilon+\varepsilon. \qquad (3.4.4)$$

证 τ_ε 为有限 $\mathscr{F}_\cdot^\xi$-时，事实上

$$P(\tau_\varepsilon=\infty)=P(\sup_{1\leqslant i<\infty}\xi_i<\varepsilon)=\prod_{i=1}^{\infty}P(\xi_i<\varepsilon)$$

$$=\prod_{i=1}^{\infty}(1-P(\xi_i\geqslant\varepsilon))=0 \quad (\text{由条件(ii)}).$$

$$E\tau_\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P(\tau_\varepsilon=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\prod_{i=1}^{n-1}P(\xi_i<\varepsilon)\cdot P(\xi_n\geqslant\varepsilon)$$

$$=p\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot q^{n-1}+p=p+p\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}q^n\Big)=\frac{1}{p}<\infty.$$

$$E\xi_{\tau_\varepsilon}=\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi_n\cdot\chi_{(\tau_\varepsilon=n)})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}E[(\xi_n-\varepsilon+\varepsilon)\cdot\chi_{(\tau_\varepsilon=n)}]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}E[(\xi_n-\varepsilon)^+\cdot\chi_{(\tau_\varepsilon\geqslant n)}]+\varepsilon.$$

注意：$(\tau_\varepsilon\geqslant n)\in\mathscr{F}^{\xi}_{n-1}, n\in\mathbf{N}$. 这里，定义 $\mathscr{F}^{\xi}_0=\{\varnothing,\Omega\}$，因此，

$$E\xi_{\tau_\varepsilon}=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi_n-\varepsilon)^+\cdot P(\tau_\varepsilon\geqslant n)$$
$$=\varepsilon+E(\xi_1-\varepsilon)^+\cdot\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_\varepsilon\geqslant n).$$

由此即得(3.4.4)式.

引理 3.4.2

(i)对 $\forall\ c>0$，$\exists$ 唯一的 $\bar{\varepsilon}\in\mathbf{R}$，使得

$$E(\xi_1-\bar{\varepsilon})^+=c. \tag{3.4.5}$$

(ii)对 $\forall\ b\in\mathbf{R}$，必有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i\leqslant b+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-b)^+, n\in\mathbf{N}. \tag{3.4.6}$$

证 令 $f(u)=E(\xi_1-u)^+, u\in\mathbf{R}$，显然，$f(u)$是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，且单调下降. 因为 $E|\xi_1|<\infty$，而有 $f(u)\xrightarrow[u\to-\infty]{}\infty$，$f(u)\xrightarrow[u\to\infty]{}0$. 故对任意 $c>0$，结论(i)成立.

对 $\forall\ i\in\mathbf{N}$，有 $\xi_i\leqslant b+(\xi_i-b)^+$，于是

$$\xi_i\leqslant b+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-b)^+\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

由此，即得(3.4.6)式.

定理 3.4.1 设收益函数为

$$Y_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i-c\cdot n, n\in\mathbf{N}, \tag{3.4.7}$$

其中，c 为某个正实数，则

$$EY_{\bar{\tau}}\geqslant EY_\tau,\quad\forall\ \tau\in S, \tag{3.4.8}$$

其中，$\bar{\tau}=\tau_{\bar{\varepsilon}}$由(3.4.3)式定义，而$\bar{\varepsilon}$由(3.4.5)式决定．

证 $\bar{\varepsilon}$满足(3.4.5)式$\Longrightarrow P(\xi_1>\bar{\varepsilon})>0$(因为$c>0$)，

从而，按引理3.4.1，$\bar{\tau}\in S$，且

$$E(\max_{1\leqslant i\leqslant \bar{\tau}}\xi_i)=E\xi_{\bar{\tau}}=E(\xi_1-\bar{\varepsilon})^+\cdot E\bar{\tau}+\bar{\varepsilon}.$$

于是，
$$EY_{\bar{\tau}}=E(\max_{1\leqslant i\leqslant \bar{\tau}}\xi_i-c\cdot\bar{\tau})=E(\xi_{\bar{\tau}}-c\cdot\bar{\tau})$$
$$=c\cdot E\bar{\tau}+\bar{\varepsilon}-c\cdot E\bar{\tau}=\bar{\varepsilon},$$

即
$$EY_{\bar{\tau}}=\bar{\varepsilon}. \tag{3.4.9}$$

以下分两步来说明$\bar{\tau}$就是最优停时．

第一步，设$\tau\in S$，且$E\tau<\infty$.

按引理3.4.2(ii)，有

$$EY_\tau=E(\max_{1\leqslant i\leqslant \tau}\xi_i-c\tau)\leqslant b+E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}[(\xi_i-b)^+-c]\Big).$$

由此，并利用定理3.3.1得

$$EY_\tau\leqslant b+(E(\xi_1-b)^+-c)E\tau\quad(\forall\ b\in\mathbf{R}).$$

于是，因对$\forall\ b>\bar{\varepsilon}$，有$E(\xi_1-b)^+-c<0$，故$EY_\tau\leqslant b$. 注意$b$的任意性，并考虑到(3.4.5)式即知结论真．

第二步，设$\tau\in S$. 按引理3.4.2，$P(\xi_1\geqslant\bar{\varepsilon})>0$. 因此，对任意$\gamma\leqslant\bar{\varepsilon}$，有$P(\xi_1\geqslant\gamma)>0$. 令$\tau_\gamma=\inf\{n\in N:\xi_n\geqslant\gamma\}$，则按引理3.4.1，$E\tau_\gamma<\infty$，且$EY_{\tau_\gamma}>-\infty$. 由此知：$\tau_\gamma\in S$，且$E\tau_\gamma<\infty$. 令$\sigma_\gamma=\tau V\tau_\gamma$，则$\sigma_\gamma\in S(-\infty<\gamma\leqslant\bar{\varepsilon})$. 显然，对$\forall\ n\in N$，$\sigma_\gamma\wedge n$满足第一步的要求．于是，$EY_{\sigma_\gamma\wedge n}\leqslant EY_{\bar{\tau}}=\bar{\varepsilon}(-\infty<\gamma\leqslant\bar{\varepsilon})$. 注意：$P(\sigma_\gamma\geqslant n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，且$\{\sigma_\gamma\geqslant n\}$是$\mathscr{F}^{\xi}_{n-1}$-可测的．因此，$\chi_{(\sigma_\gamma\geqslant n)}$与$\xi_n$独立，故$\eta_n=\gamma+\chi_{(\sigma_\gamma\geqslant n)}\xi_n$关于$n\in N$是一致可积的．由$Y_{\sigma_\gamma\wedge n}\geqslant\eta_n\quad(n\in\mathbf{N})$可知：Fatou引理的条件满足．从而，$EY_{\sigma_\gamma}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}EY_{\sigma_\gamma\wedge n}\leqslant EY_{\bar{\tau}}=\bar{\varepsilon}$. 然而，对$\forall\ -\infty<\gamma\leqslant\bar{\varepsilon}$，有$Y_\tau\leqslant Y_{\tau\vee\tau_\gamma}=Y_{\sigma_\gamma}$，故$EY_\tau\leqslant\bar{\varepsilon}$. #

现在，将上述结果稍作推广．

让$N=\{1,2,\cdots\}$，集S和σ-代数$\mathscr{F}.^{\xi}$同前设，让$\{c_n,n=0,1,$

$2,\cdots\}$为一个单调上升的实数列，且 $c_0=0, c_1>0, \{\Delta c_n=c_n-c_{n-1}, n \in N\}$为单调不减数列，考虑收益函数

$$Y_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i-c_n \quad (n\in \mathrm{N}). \tag{3.4.10}$$

引理 3.4.3 设 $\varepsilon_n, k\in \mathrm{N}$，为任一单调不减数列，且 $p=P(\xi_1\geqslant a)>0$，其中 $a=\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k$. 定义可测函数

$$\tau_{\varepsilon.}=\inf\{n: \max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i\geqslant\varepsilon_n, n\in \mathrm{N}\}, \inf\varphi=\infty, \tag{3.4.11}$$

则 $\tau_{\varepsilon.}$ 为 $\mathscr{F}^{\xi}_{.}$-时，且 $E\tau_\varepsilon<\infty$.

证 $\forall\, n\in N$，且 $n>1$，有

$$(\tau_{\varepsilon.}\, n)=\bigcap_{i=1}^{n-1}\{\xi_i<\varepsilon_i\}\cdot\{\xi_n\geqslant\varepsilon_n\}\in\mathscr{F}^{\xi}_n.$$

于是，$P(\tau_{\varepsilon.}=n)=\prod\limits_{i=1}^{n-1}P(\xi_i<\varepsilon_i)\cdot P(\xi_n\geqslant\varepsilon_n)\leqslant(1-p)^{n-1}$，

从而，$E\tau_{\varepsilon.}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot P(\tau_{\varepsilon.}=n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot(1-p)^{n-1}=\dfrac{1}{p^2}<\infty.$

#

定理 3.4.2 假设

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta c_n=c>0$；

(ii) 数列 $\varepsilon.$ 由如下方程确定：

$$E(\xi_1-\varepsilon_n)^+=\Delta c_n, n\in \mathrm{N}; \tag{3.4.12}$$

(iii) $\tau'=\tau_{\varepsilon.}$ 由(3.4.11)式定义；

则 τ^* 为收益函数 $y.$ 的最优停时，即

$$Ey_{\tau^*}\geqslant Ry_\tau \quad (\forall\, \tau\in S).$$

证 按引理 3.4.2(i)，方程(3.4.11)具有唯一解 $\varepsilon.$，且 $\varepsilon.$ 是单调不减的数列，让 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n$，则

$$E(\xi_1-a)^+=c>0.$$

从而 $P(\xi_1\geqslant a)>0$. 于是，按引理 3.4.3，有 $E\tau^*<\infty$. 那么，

$$Ey_{\tau^*}=E(\max_{1\leqslant i\leqslant\tau_*}\xi_i-c_{\tau^*})=E\varepsilon_{\tau^*}+E[(\xi_{\tau^*}-\varepsilon_{\tau^*})^+-c_{\tau^*}]$$

$$=E\varepsilon_{\tau^*}+\sum_{n=1}^{\infty}E([(\xi_n-\varepsilon_n)^+-c_n]x_{(\tau_*=n)})$$

$$=E\varepsilon_{\tau^*}+\sum_{n=1}^{\infty}E[(\xi_1-\varepsilon_n)^+-\Delta c_n](P(\tau^*\geqslant n)=E\varepsilon_\tau,$$

即
$$Ey_{\tau^*}=E\varepsilon_{\tau^*}.$$

如果 $\tau\in S$，且 $\tau\leqslant\tau^*$，则

$$\begin{aligned}Ey_\tau&\leqslant E\varepsilon_\tau+E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}(\xi_i-\varepsilon_\tau)^+-c_\tau\Big)\\&\leqslant E\varepsilon_\tau+E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}[(\xi_i-\varepsilon_i)^+-\Delta c_i]\Big)\\&=E\varepsilon_\tau\leqslant E\varepsilon_{\tau^*}=Ey_{\tau^*},\end{aligned}$$

即
$$Ey_\tau\leqslant Ey_{\tau^*}.$$

如果 $\tau\in S$，且 $\tau\geqslant\tau^*$，则

$$\begin{aligned}Ey_\tau&\leqslant\varepsilon_1+E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}[(\xi_i-\varepsilon_1)^+-c_1]\Big)+c_1\cdot E\tau-Ec_\tau,\\&=\varepsilon_1+c_1\cdot E\tau-Ec_\tau.\end{aligned}$$

因为 $\Delta c_1=c_1,\Delta c_n\uparrow$，因此，$\Delta c_n\geqslant c_1,n\in N$，从而

$$Ec_\tau-c_1\cdot E\tau=E\Big(\sum_{i=1}^{\tau}(\Delta c_i-c_1)\Big)\geqslant 0,$$

故
$$Ey_\tau\leqslant\varepsilon_1\leqslant E\varepsilon_{\tau^*}=Ey_{\tau^*}.$$

上述讨论表明：当 $\tau\in S$，且 $\tau\leqslant\tau^*$ 或 $\tau\geqslant\tau^*$ 时，均有

$$Ey_\tau\leqslant E_{\tau^*}. \tag{3.4.13}$$

现在对$\forall\ \tau\in S$，有

$$Ey_\tau=E(y_{\tau\wedge\tau^*}+y_{\tau\vee\tau^*}-y_{\tau^*}).$$

按引理 3.2.3，$\tau\wedge\tau^*$ 和 $\tau\vee\tau^*$ 均为 $\mathscr{F}^\xi$.-时，且 $\tau\wedge\tau^*\leqslant\tau^*,\tau\vee\tau^*\geqslant\tau^*$，故利用(3.4.13)式即得

$$Ey_\tau\leqslant Ey_{\tau^*}+Ey_{\tau^*}-Ey_{\tau^*}=Ey_{\tau^*}.$$

注 如果让 $\Delta c_n=c,n\in N$，则定理 3.4.5 就变成为定理 3.4.3 关于上述各结论中的参数 c 在经济学中均有明确解释．有兴趣的读者可阅读本书的第六章．

第四章　半鞅（Ⅰ）

半鞅是条件期望理论发展的继续．半鞅理论的重要性就在于：它是随机微积分学建立的基础．本章只介绍与离散参数情形有关的基本知识．考虑的半鞅所涉及的随机变量均定义在已知的完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上．L_1,L_2分别表示定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可积和平方可积变量的全体．L_1,L_2中的元素$\xi\in L_1,\eta\in L_2$分别赋以范数：$\|\xi\|_1=E|\xi|$，$\|\eta\|_2=(E|\eta|^2)^{\frac{1}{2}}$．“$L_i$-lim”表示按$L_i$中范数收敛的极限　$(i=1,2)$．“a.c-lim”表示以概率1收敛的极限．“P-lim”表示依概率收敛的极限．“qm-lim”$\triangleq$“L_2-lim”．

符号说明：

$T_n=\{0,1,2,\cdots,n\}$　（n为非负整数），

$$T_\infty=\{0,1,2,\cdots\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}T_n,$$

$T=T_n$或T_∞，$\overline{T}_\infty=T_\infty\cup\{\infty\}$，

$\mathscr{F}_k,k\in T$为$\mathscr{F}$中的σ-代数流．

希腊字母τ、σ、…一般用于表示停时．

§1　半鞅概念及其基本性质

定义 4.1.1　设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$为一可积随机列．

如果$E(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k)\leqslant\xi_k$　$(k,k+1\in T)$，则称此序列为上鞅．

如果$E(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k)=\xi_k$　$(k,k+1\in T)$，则称此序列为鞅．

如果$E(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k)\geqslant\xi_k$　$(k,k+1\in T)$，则称此序列为下鞅．

如果$\xi_k=\mu_k+\zeta_k,k\in T$，其中$\mu_k,k\in T$为鞅，而$\zeta_k,k\in T$，可以表示成两个单调不减的适应随机序列之差，则称$\xi_k,k\in T$为半鞅．

注意到单调不减的适应随机序列为下鞅，因此半鞅实际上是前三类特别鞅的代数和.由此可见，定义 4.1.1 中的前三类特别半鞅是鞅论中的基本内容.因此，今后涉及到的半鞅，通常为定义 4.1.1 中的三种特别情形.显然，鞅既是上鞅也是下鞅.

例 4.1.1 设 $\eta\in L_1$，$\xi_n=E(\eta/\mathscr{F}_n)$，$n\in T$，则 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$ 为鞅.

证 利用 Jensen 不等式可知

$$|\xi_n|\leqslant E(|\eta||\mathscr{F}_n).$$

从而 $E|\xi_n|\leqslant E|\eta|$，即 $\xi_n\in L_1$，$n\in T$.按条件期望的性质，可得

$$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(E(\eta|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n)=E(\eta|\mathscr{F}_n),n\in T.$$

于是，按定义 4.1.1，$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$ 为鞅.

注 通常称此鞅为 Doob 鞅或正则鞅.

例 4.1.2 设 n_0 为 T 中某个固定的元素，η_{n_0} 为 $\mathscr{F}_{n_0}$-可测的可积变量.若

$$\xi_n=\begin{cases}\eta_{n_0}-E(\eta_{n_0}|\mathscr{F}_{n_0-1}); & \text{当 } n\geqslant n_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n<n_0 \text{ 时},\end{cases}\quad(n\in T)$$

则 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$ 为鞅.

证 因 $E|\xi_n|\leqslant E|\eta_{n_0}|+E|\eta_{n_0}|=2E|\eta_{n_0}|<\infty$，而有 $\xi_n\in L_1$，$n\in T$.此外，对 $n,n+1\in T$，有

$$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\begin{cases}E(\eta_{n_0}|\mathscr{F}_n-E(E(\eta_{n_0}|\mathscr{F}_{n_0-1})|\mathscr{F}_n), & \text{当 } n\geqslant n_0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } n<n_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

注意：对 $\forall\ n\geqslant n_0$，η_{n_0}是 $\mathscr{F}_n$-可测的.于是

$$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\begin{cases}\eta_{n_0}-E(\eta_{n_0}|\mathscr{F}_{n_0-1}), & \text{当 } n\geqslant n_0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } n<n_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

从而 $\quad E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\xi_n\quad(n,n+1\in T)$.

例 4.1.3 设 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$ 为可积变量列，且对 $\forall\ n\in T$，有

$$\xi_n=\sum_{i=0}^{n}(\xi_i-E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})),(\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0),$$

则$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为鞅.

证 显然,ξ_n是$\mathscr{F}_n$-可测的. 令

$$\psi_i=\xi_i-E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1}),$$

则 $E|\psi_i|\leqslant 2\cdot E|\xi_i|<\infty \quad (\forall i\in T)$. 从而$\psi_i\in L_1, i\in T$.

又$E|\xi_n|\leqslant \sum\limits_{i=0}^{n} E|\psi_i|<\infty \quad (n\in T)$. 于是,$\xi_n\in L_1$. 最后,验证鞅性质如下:

$$E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}\psi_i+E(\psi_n|\mathscr{F}_{n-1})=\xi_{n-1} \quad (n-1, n\in T),$$

故$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为鞅.

下面,介绍半鞅的某些基本性质.

引理 4.1.1 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为鞅,$f(x)$为$R$上的连续下凸函数,且$E|f(\xi_n)|<\infty, n\in T$. 则$\{f(\xi_n), \mathscr{F}_n, n\in T\}$为下鞅.

引理 4.1.2 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为下鞅,$f(x)$为$R$上的连续单调非降的下凸函数,且$E|f(\xi_n)|<\infty, n\in T$. 则$\{f(\xi_n), \mathscr{F}_n, n\in T\}$为下鞅.

上述两条引理均可由 Jensen 不等式直接推出.

推论 4.1.1 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为下鞅,则$\{\xi_n^+, \mathscr{F}_n, n\in T\}$亦为下鞅. 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为非负下鞅,则对$\forall\ r\geqslant 1$, $\{\xi_n^r, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为下鞅.

证 显然,$f(x)=x^+$或$(x^+)^r$均为$\mathbf{R}$上的连续单调非降下凸函数. 利用引理 4.1.2 即可得此结论. #

引理 4.1.3 若$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\in T\}$为上或下鞅,则$\{E\xi_n, n\in T\}$为单调数列.

证 利用条件期望的性质及定义 4.1.1 立即可得此结论. #

定理 4.1.1 (半鞅停时代换的不变性) 设$\{\xi_k, \mathscr{F}_k, k\in T_n\}$为半鞅;$\tau_i, i\in T_s$,为单调不减的$(\mathscr{F}_k, k\in T_n)$-时列,这里$n, s$均为正整数,则$\{\xi_{\tau_i}, \mathscr{F}_{\tau_i}, i\in T_s\}$亦为半鞅.

证 按引理 3.3.2,ξ_{τ_i}是$\mathscr{F}_{\tau_i}$-可测的 r.v. $(i\in T_s)$. 因s为有限

整数，因此，不妨设 $s=1$. 为明确计，讨论上鞅，即在此情形下要求证明：

(i) $\xi_{\tau_i}\in L_1\ (i=0,1)$;

(ii) $E(\xi_{\tau_1}|\mathscr{F}_{\tau_0})\leqslant\xi_{\tau_0}$.

对 $\forall\ i\in T_1, E|\xi_{\tau_i}|=\sum\limits_{k=0}^{n}E(\chi_{(\tau_i=k)}\cdot|\xi_k|)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}E|\xi_k|<\infty$，从而得结论(i)，往下验证(ii).

考虑 $\forall\ A\in\mathscr{F}_{\tau_0}$，按 $\mathscr{F}_{\tau_0}$ 之定义，有

$$A=A\cdot\{0\leqslant\tau_0\leqslant n\}=\bigcup_{k=0}^{n}A_k,\ A_k=A\cdot(\tau_0=k)\in\mathscr{F}_k\quad(k\in T_n).$$

按假设：$\tau_0\leqslant\tau_1$. 于是，$A_k=A\cdot(\tau_0=k)\cdot(\tau_0\leqslant\tau_1)=A_k\cdot(k\leqslant\tau_1)$.

注意：$(m\leqslant\tau_1)\in\mathscr{F}_{m-1}$. 于是，利用上鞅性，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k)}\xi_k\mathrm{d}P&=\sum_{k=0}^{n}\left[\int_{A_k\cdot(\tau_1=k)}\xi_k\mathrm{d}P+\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k+1)}\xi_k\mathrm{d}P\right]\\&\geqslant\sum_{k=0}^{n}\left[\int_{A_k\cdot(\tau_1=k)}\xi_{\tau_1}\mathrm{d}P+\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k+1)}E(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k)\mathrm{d}P\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k\cdot(\tau_1=k)}\xi_{\tau_1}\mathrm{d}P+\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k+1)}\xi_{k+1}\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

由此递推关系可推出如下不等式：

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k)}\xi_k\mathrm{d}P\geqslant\int_A\xi_{\tau_1}\mathrm{d}P,$$

故 $$\int_A\xi_{\tau_0}\mathrm{d}P=\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k}\xi_{\tau_0}\mathrm{d}P=\sum_{k=0}^{n}\int_{A_k\cdot(\tau_1\geqslant k+1)}\xi_k\mathrm{d}P\geqslant\int_A\xi_{\tau_1}\mathrm{d}P,$$

按条件期望之定义，$\xi_{\tau_0}\geqslant E(\xi_{\tau_1}|\mathscr{F}_{\tau_0})$. #

例 4.1.4 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为独立同分布的 r. v. 列，$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\eta_i$, $\mathscr{F}_k=\sigma(S_{n-k+1},\cdots,S_n)$, $1\leqslant k\leqslant n$. 令 $\xi_k=\dfrac{S_{n+1-k}}{n+1-k}$, $1\leqslant k\leqslant n$，则 $\xi=\{\xi_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 为鞅.

显然，ξ_k 是 $\mathscr{F}_k$-可测的. 利用 η_i 独立同分布及 S_i 的定义，不难证明：对 $\forall\ 1\leqslant j\leqslant n+1-k$，有

$$E(\eta_j|\mathscr{F}_k)=E(\eta_1|\mathscr{F}_k) \quad (\text{p-a.s}).$$

于是，
$$\xi_k=E(\xi_k|\mathscr{F}_k)=\frac{1}{n+1-k}E(S_{n+1-k}|\mathscr{F}_k)$$
$$=\frac{1}{n+1-k}\sum_{j=1}^{n+1-k}E(\eta_j|\mathscr{F}_k)$$
$$=E(\eta_1|\mathscr{F}_k)=E(\xi_n|\mathscr{F}_k) \quad (\text{p-a.s}).$$

故由例 4.1.1 知 ξ 为鞅.

现假定 η_k 取值于$\{0,1,2,\cdots\}$,则

$$P\{S_k<k,1\leqslant k\leqslant n/S_n\}=\left(1-\frac{S_n}{n}\right)^+.$$

为证明此公式,定义:

$$\tau=\begin{cases}\min\{1\leqslant k\leqslant n:\xi_k\geqslant 1\};\\ n.\ 若\{\cdots\}=\varnothing.\end{cases}$$

按定理 4.1.4,$E(\xi_\tau|\mathscr{F}_1)=\xi_1$ (p-a.s),即 $E(\xi_\tau|S_n)=\dfrac{S_n}{n}$ (p-a.s).

令

$$A_1=\{\omega: S_k<k,1\leqslant k\leqslant n\},A_2=\{\omega:\max_{1\leqslant l\leqslant n}\xi_l\geqslant 1,S_n<n\},$$
$$A_3=\{\omega: S_n\geqslant n\},$$

则 $\xi_\tau=1$ 于 A_2 上;$\xi_\tau=\zeta_n=S_1$ 于 A_1 上;$\xi_\tau\geqslant 1$ 于 A_3 上.

注意:$S_1<1$ 于 A_1 上,从而:$S_1=0$,即 $\xi_\tau=0$ 于 A_1 上. 令 $A_4=\{\omega: S_n<n\}$,则 $A_4\in\mathscr{F}_1$. 于是:$E(\chi_{A_4}\cdot\xi_\tau/S_n)=\chi_{A_4}E(\xi_\tau/S_n)=\chi_{A_4}\cdot\dfrac{S_n}{n}$. 另一方面,有

$$E(\chi_{A_4}\cdot\xi_\tau/S_n)=E(\chi_{A_4}\cdot\chi_{A_2}/S_n)=\chi_{A_4}\cdot(1-P(A_1/S_n)),$$

故
$$P(A_1/S_n)=(1-\frac{S_n}{n})^+.$$

停时代换定理 4.1.1 是在有限参数集 T_n 上考虑的. 对于 $T=T_\infty$的情形该结论的推广就导致 Doob 的停时代换定理.

定理 4.1.2 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T\}$为鞅(或下鞅),$\tau_1,\tau_2$ 为关于 $\mathscr{F}_\cdot$ 的有限停时,且

(i) $E|\xi_{\tau_i}|<\infty, i=1,2$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{(\tau_i>n)}|\xi_n|\mathrm{d}P=0, i=1,2$,

则 $$E(\xi_{\tau_2}|\mathscr{F}_{\tau_1}) \underset{(\geqslant)}{=} \xi_{\tau_1} \text{于集}\{\tau_2\geqslant\tau_1\}\text{上(p-a. s)}.$$

若还有 $\{\tau_2\geqslant\tau_1\}=\Omega$(p-a. s)，则 $\{\xi_{\tau_i},\mathscr{F}_{\tau_i},i=1,2\}$ 为二元鞅(或下鞅).

证 由引理 3.2.3 知：$\{\tau_2\geqslant\tau_1\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}\cap\mathscr{F}_{\tau_2}$. 令

$$X_i=\chi_{(\tau_2\geqslant\tau_1)}\cdot\xi_{\tau_i}, i=1,2,$$

则定理中第一个结论等价于证明：$X=\{X_i,\mathscr{F}_{\tau_i},i=1,2\}$ 为鞅(或下鞅).

按条件(i)，$X_i\in L_1, i=1,2$. 下面验证鞅(或下鞅)关系.

设 $A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$. 令 $A_n=A\cdot(\tau_1=n)$，则

$$\int_A X_2\mathrm{d}P=\int_{A\cdot(\tau_2\geqslant\tau_1)}\xi_{\tau_2}\mathrm{d}P=\sum_{n\in T}\int_{A_n\cdot(\tau_2\geqslant n)}\xi_{\tau_2}\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{n\in T}\lim_{m\to\infty}\int_{A_n\cdot(n\leqslant\tau_2\leqslant m)}\xi_{\tau_2}\mathrm{d}P$$

$$\int_A X_1\mathrm{d}p=\sum_{n\in T}\int_{A_n\cdot(\tau_2\geqslant n)}\xi_n\mathrm{d}P$$

$$\underset{(\leqslant)}{=}\sum_{n\in T}\left(\int_{A_n\cdot(n\leqslant\tau_2\leqslant m)}\xi_{\tau_2}\mathrm{d}P+\int_{A_n\cdot(\tau_2>m)}\xi_m\mathrm{d}P\right).$$

于是，利用条件(ii)，可得

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_{A_n\cdot(n\leqslant\tau_2<m)}\xi_{\tau_2}\mathrm{d}P-\int_{A_n\cdot(\tau_2\geqslant n)}\xi_n\mathrm{d}P\right)$$

$$\underset{(\geqslant)}{=}\overline{\lim_{m\to\infty}}\left(-\int_{A_n\cdot(\tau_2>m)}\xi_m dP\right)=0.$$

故 $$\int_A X_2\mathrm{d}p\underset{(\geqslant)}{=}\int_A X_1\mathrm{d}p.$$

定理的第二结论显然成立. #

注 此定理对上鞅亦成立. 如果用 T_n 代替 T，则定理的条件(i)，(ii)自然成立，于是定理 4.1.1 就是此定理的特例.

在定理 4.1.2 中条件(i)，(ii)均不可少也不可相互取代. 例

如，设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完全概率空间，$\{A_n,n\geqslant 1\}$为$\mathscr{F}$中一个互不相容的事件列，且$\sum A_n=\Omega, P(A_n)>0\quad(n\geqslant 1)$，$\frac{1}{nP(A_n)}\uparrow\infty$. 定义：$\xi_n=\frac{1}{nP(A_n)}\cdot\chi_{A_n}$，$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)\quad(n\geqslant 1)$，则$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$一致可积. 定义停时$\tau$，使得：$(\tau=n)=A_n(n\geqslant 1)$. 显然，$\tau$为有限的$\mathscr{F}_\cdot$-时. 然而，$E\xi_\tau=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$. 从而，对此种情形条件(i)不成立. 但是，条件(ii)成立.

定理 4.1.3 设$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$，且∃非负的$\eta\in L_1$，∋$|\xi_n|\leqslant E(\eta|\mathscr{F}_n)\quad$(a.s). $n\in T_\infty$，则对任意有限停时τ，有

$$E|\xi_\tau|<\infty;\ \lim_{m\to\infty}\int_{(\tau>m)}|\xi_m|\mathrm{d}p=0.$$

证 τ为有限停时表明：$P(\tau>n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. 于是

$$\int_{(\tau>n)}|\xi_n|dP\leqslant\int_{(\tau>n)}E(\eta|\mathscr{F}_n)\mathrm{d}P=\int_{(\tau>n)}\eta\mathrm{d}P\xrightarrow[n\to\infty]{}0;$$

$$E|\xi_\tau|=\sum_{n\in T_\infty}E(|\xi_n|\cdot\chi_{(\tau=n)})\leqslant\sum_{n\in T_\infty}E(\chi_{(\tau=n)}\cdot E(\eta|\mathscr{F}_n))$$

$$=\sum_{n\in T_\infty}E(\chi_{(\tau=m)}\cdot\eta)=E\eta<\infty.$$

推论 4.1.2 若$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为一致可积鞅，$\tau$为有限停时，则$E\xi_\tau=E\xi_1$.

证 注意：$n\wedge\tau$为一个有界停时. 于是，按定理 4.1.4，有

$$\xi_{n\wedge\tau}=E(\xi_n|\mathscr{F}_{n\wedge\tau})\quad(\text{p-a.s}).$$

从而，$|\xi_{n\wedge\tau}|\leqslant E(|\xi_n||\mathscr{F}_{n\wedge\tau})$，$E|\xi_{n\wedge\tau}|\leqslant E|\xi_n|$. 由此及一致可积性知

$$E|\xi_\tau|=E\lim_{n\to\infty}|\xi_{n\wedge\tau}|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E|\xi_{n\wedge\tau}|$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E|\xi_n|\leqslant\sup_n E|\xi_n|<\infty.$$

这就验证了定理 4.1.2 的条件(i). 不难验证条件(ii)成立. 引用定理 4.1.2 即可得所需结论.

推论 4.1.3 设$\xi=(\xi_n)n\in T_\infty$为自生鞅(或下鞅)，$\mathscr{F}_n^\xi=$

$\sigma(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$n\in T_\infty$. τ 为 $\mathscr{F}^\xi_\cdot$-时. 若

(i) $E\tau<\infty$；

(ii) $\exists\ n_0\in T_\infty$ 及正常数 C，使得对 $\forall\ n\geqslant n_0$，有

$$E(|\Delta\xi_{n+1}|\,|\mathscr{F}^\xi_n)\leqslant c \text{ 于}(\tau\geqslant n)\text{上}(\text{p-a.s})；$$

其中，$\Delta\xi_n=\xi_n-\xi_{n-1}$，则 $\{\xi_0,\xi_\tau;\mathscr{F}^\xi_0,\mathscr{F}^\xi_\tau\}$ 为二元鞅(或下鞅).

证 首先证明：$\xi_\tau\in L_1$.

注意：$E\tau<\infty$ 表明 τ 为有限停时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(\tau\geqslant n)=E\tau<\infty$. 于是，由推论的条件(ii)可得(让 $\xi_{-1}=0$)

$$E|\xi_\tau|\leqslant E(\sum_{k=0}^{\tau}|\Delta\xi_k|)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}E(|\Delta\xi_k|\cdot\chi_{(\tau=n)})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}E(|\Delta\xi_k|\cdot\chi_{(\tau\geqslant k)})$$

$$=N_0+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}E(\chi_{(\tau\geqslant k)}\cdot E(|\Delta\xi_k|\,|\mathscr{F}_{k-1}))$$

$$\leqslant N_0+c\cdot\sum_{k=n_0}^{\infty}P(\tau\geqslant k)<\infty.$$

现在证明：$\lim\limits_{n\to\infty}E(\chi_{(\tau>n)}\cdot|\xi_n|)=0$.

注意：若 $|\xi_n|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}|\Delta\xi_k|$，则

$$E(x_{(\tau)n}\cdot|\xi_n|)\leqslant E(\chi_{(\tau>n)}\cdot\sum_{k=0}^{\tau}|\Delta\xi_k|)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

故可由定理 4.1.2 推出此结论.

定理 4.1.4(Wald 方程) 设 $\xi=(\xi_n)n\geqslant1$ 为独立同分布的 r.v. 列.

且 $E|\xi_1|<\infty$，τ 为 $\mathscr{F}^\xi_\cdot$-时，且 $E\tau<\infty$，则

$$E(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i)=E\xi_1\cdot E\tau.$$

若 $E\xi_1^2<\infty$，则

$$E(\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i-\tau\cdot E\xi_1)^2=V\xi_1\cdot E\tau,$$

其中 $V\xi_1=E(\xi_1-E\xi_1)^2$.

证 令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i-n\cdot E\xi_1$，则显然 $S=\{S_n,\mathscr{F}_n^{\xi},n\geqslant 1\}$ 为鞅. 又

$$E(|\Delta S_{n+1}||\mathscr{F}_n^{\xi})=E(|\xi_{n+1}-E\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n^{\xi})$$
$$\leqslant 2\cdot E|\xi_1|=c<\infty,$$

于是，由推论 4.1.3 知：$\{S_1,S_\tau;\mathscr{F}_1^{\xi},\mathscr{F}_\tau^{\xi}\}$ 为二元鞅，从而

$$ES_\tau=ES_1=E(\xi_1-E\xi_1)=0,$$

这就得到了第一个等式.

类似地，若令 $\tilde{S}_n=S_n^2-n.V\xi_1$，则可得第二个等式.

例 4.1.5 利用 Wald 方程讨论对弈破产问题. 设 $\xi=(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 为独立同分布的 Bernoulli r. v. 列，且 $P(\xi_1=1)=p,P(\xi_1=-1)=1-p=q$. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\tau=\inf\{n\geqslant 1: S_n=B$ 或 $A\};\tau=\infty$，若 $\{\cdots\}=\varnothing$，其中 $-A$ 和 B 为非负整数，则 $E\tau<\infty$ （证明可参看[13](b)).

若 $p=q$，则定理 4.1.2 表明：

$$ES\tau=E\xi_1\cdot E\tau=0,ES_\tau^2=V\xi_1\cdot E\tau=E\tau.$$

令 $\alpha=P(S_\tau=A),\beta=P(S_\tau=B)$，则 $\alpha+\beta=1$. 又 $\alpha\cdot A+\beta\cdot B=0$. 从而，

$$\alpha=\frac{B}{B+|A|},\quad \beta=\frac{|A|}{B+|A|}.$$

于是，$E\tau=ES_\tau^2=\alpha\cdot A^2+\beta\cdot B^2=|A\cdot B|$.

若 $p\neq q$，则 $Y_n=(\frac{q}{p})^{S_n},n\geqslant 1$，为鞅. 于是，由定理 4.1.2，有 $E(\frac{q}{p})^{S_\tau}=E(\frac{q}{p})^{S_1}=1$. 由此即知：$\alpha\cdot(\frac{q}{p})^A+\beta\cdot(\frac{q}{p})^B=1$. 故

$$\alpha=((\frac{q}{p})^B-1)\cdot((\frac{q}{p})^B-(\frac{q}{p})^A)^{-1},$$

$$\beta=(1-(\frac{q}{p})^{A})\cdot((\frac{q}{p})^{B}-(\frac{q}{p})^{A})^{-1}.$$

按定理 4.1.7，$E\tau=\dfrac{ES_\tau}{E\xi_1}=\dfrac{\alpha A+\beta B}{p-q}$.

上述结果可有如下解释：如果甲、乙双方对弈，且各具有资本 $|A|$ 和 B，每次投赌一个单位，重复博弈是独立同分布的，则 $E\tau<\infty$ 表明：在有限时刻甲、乙必有一方破产，破产概率分别为 α 和 β.

§2 基本不等式

引理 4.2.1 设 $\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\in T\}$ 为一可积随机列，对 $\forall\ k\in T$，$\zeta_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\xi_i$. τ_1,τ_2 为有界的 $\mathscr{F}_\cdot$-时，且 $\tau_1\leqslant\tau_2$(p-a.s)，则

$$E[\zeta_{\tau_2}-(\rho_{\tau_2}^{(+)}-\rho_{\tau_1}^{(+)})|\mathscr{F}_{\tau_1}]\leqslant\zeta_{\tau_1}\leqslant E[\zeta_{\tau_2}+\rho_{\tau_2}^{(-)}-\rho_{\tau_1}^{(-)}|\mathscr{F}_{\tau_1}],\tag{4.2.1}$$

其中：$\rho_k^{(\pm)}=\sum\limits_{i=0}^{k}(E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1}))^{\pm},k\in T;\mathscr{F}_{1}=\mathscr{F}_0$.

证 令 $\eta_k=\sum\limits_{i=0}^{k}[\xi_i-E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})],k\in T$. 则由例 4.1.3 知：$\{\eta_k,\mathscr{F}_k,k\in T\}$ 为鞅. 注意，τ_1,τ_2 为有界停时. 于是，$\exists\ n\in T$，使得 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant n$. 因此，可以将 τ_1,τ_2 看作 $\{\mathscr{F}_k,k\in T_n\}$-时. 从而，利用定理 4.1.4 可得结论：$\{\eta_{\tau_i},\mathscr{F}_{\tau_i},i=1、2\}$ 为鞅. 这表明：对 $\forall\ A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$，有

$$\int_A\zeta_{\tau_1}\mathrm{d}p=\int_A[\zeta_{\tau_2}-\sum_{\tau_1+1}^{\tau_2}E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})\cdot\chi_{(\tau_1<\tau_2)}]\mathrm{d}P$$
$$=\int_A[\zeta_{\tau_2}-(\rho_{\tau_2}^{\oplus}-\rho_{\tau_1}^{\oplus})+(\rho_{\tau_2}^{(-)}-\rho_{\tau_1}^{(-)}]\mathrm{d}P.$$

由此及条件期望之定义即可推出(4.2.1)式.

定理 4.2.1 设 $\{\xi_i,\mathscr{F}_i,i\in T\}$ 为可积的随机列，设 $\zeta_\cdot,\rho_\cdot^{(\cdot)}$ 之定义同引理 4.2.1，则对任意 $c>0,n\in T$ 及 $p>1$，下列不等式成立：

$$p(\max_{k\in T_n}\zeta_k\geqslant c)\leqslant\frac{1}{c}E(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)});\qquad(4.2.2)$$

$$E[(\max_{k\in T_n}\zeta_k^+)^p]\leqslant(\frac{p}{p-1})^pE[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})^p];\qquad(4.2.3)$$

$$E(\max_{k\in T_n}\zeta_k^+)\leqslant\frac{e}{e-1}[1+E((\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\ln^+(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)}))].\quad(4.2.4)$$

证 令 $\tau_1=\inf\{k\in T_n;\zeta_k\geqslant c\}$；$\inf\varphi=n$. 则 τ_1 为一个以 n 为界的 $\mathscr{F}_.$-时. 让 $\tau_2=n$，则 $\tau_1\leqslant\tau_2$. 记 $\eta=\max_{k\in T_n}\zeta_k$，则因 $c>0$ 而有

$$\Omega\tau_1=\{\omega:\eta\geqslant c\}=\{\omega:\eta^+\geqslant c\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}.$$

按引理 4.2.1，$cp(\Omega_{\tau_1})\leqslant\int_{\Omega\tau_1}\zeta\tau_1\mathrm{d}P\leqslant\int_{\Omega_{\tau_1}}[\zeta_n+(\rho_n^{(-)}-\rho_{\tau_1}^{(-)})]\mathrm{d}P$ $\leqslant E((\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\chi_{\Omega_{\tau_1}})\leqslant E(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})$. 这就得到(4.2.2)式. 为证(4.2.3)，需要用到下列两个关系：

$$(\eta^+)^p=p\int_0^\infty\chi_{\Omega_{\tau_1}}c^{p-1}dc;E(c\chi_{\Omega_{\tau_1}})\leqslant E[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\chi_{\Omega_{\tau_1}}].$$

由此可得

$$\begin{aligned}E(\eta^+)^p&=p\int_0^\infty c^{p-2}E(c\cdot\chi_{\Omega_{\tau_1}})\mathrm{d}c\leqslant p\int_0^\infty c^{p-2}\mathrm{d}c\cdot E[\chi_{\Omega_{\tau_1}}(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})]\\&=pE[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\int_0^\infty\chi_{\Omega_{\tau_1}}c^{p-2}\mathrm{d}c\\&=\frac{p}{p-1}E[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\cdot(\eta^+)^{p-1}]\\&\leqslant\frac{p}{p-1}[E(\eta^+)^p]^{\frac{p-1}{p}}[E(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})^p]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

最后一步利用了 Hölder 不等式，由此即得(4.2.3)式.

最后，证明(4.2.4)式.

$$\begin{aligned}E\eta^+-1\leqslant E(\eta^+-1)^+&=\int_0^\infty P(\eta^+-1\geqslant t)\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{1+t}\int_{(\eta^+\geqslant 1+t)}(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\mathrm{d}P\mathrm{d}t\\&=E[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\int_0^{(\eta^+-1)}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}]\\&=E[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\ln^+\eta^+].\end{aligned}$$

注意：对$\forall$ $a\geqslant 0, b\geqslant 0$，有

$$a\ln^+ b\leqslant a\ln^+ a+be^{-1}.$$

利用此关系，可得

$$E\eta^+-1\leqslant E[(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})\cdot\ln^+(\zeta_n^+ +\rho_n^{(-)})]+e^{-1}\cdot E\eta^+.$$

由此即得所要的结论. #

推论 4.2.1 若$\zeta=\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T\}$为下鞅，则对$\forall$ $c>0, p>1$及$n\in T$，有

$$p\{\max_{k\in T_n}\zeta_k\geqslant c\}\leqslant\frac{1}{c}E\zeta_n^+; \tag{4.2.5}$$

$$E[(\max_{k\in T_n}\zeta_k^+)^p]\leqslant(\frac{p}{p-1})^p E(\zeta_n^+)^p; \tag{4.2.6}$$

$$E(\max_{k\in T_n}\zeta_k^+)\leqslant\frac{1}{1-e^{-1}}[1+E(\zeta_n^+\cdot\ln^+\zeta_n^+)]. \tag{4.2.7}$$

证 让$\xi_i=\zeta_i-\zeta_{i-1}$，则由$\zeta$的下鞅性，$E(\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})\geqslant 0$，(p-a.s). 于是，$\rho_k^{(-)}=0, k\in T$. 这里定义$\zeta_{-1}=\zeta_0, \mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$. 故按定理4.2.1即可得此结论.

定义 4.2.1 设$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$，$A=\{A_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$均为非负随机列. 若对任意有限$\mathscr{F}_.$-时$\tau$，有$E\xi_\tau\leqslant EA_\tau$，则称$\xi$受$A$控制.

定理 4.2.2 让ξ, A如定义4.2.1中所设，且$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$，$A_n$是$\mathscr{F}_{n-1}$-可测的$A_n\uparrow$(p-a.s).

若ξ受AF控制，则对$\forall$ $\varepsilon>0, a>0$及有限停时τ，有

(i) $P\{\xi_\tau^*\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{EA_\tau}{\varepsilon}$;

(ii) $P\{\xi_\tau^*\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}E(A_\tau\wedge a)+P\{A_\tau\geqslant a\}$;

(iii) $\|\xi_\tau^*\|_p\leqslant\left(\dfrac{2-p}{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}\|A_\tau\|_p, (0<p<1)$;

其中$\xi_n^*=\max\limits_{0<k\leqslant n}\xi_k$，$\|\eta\|_p=(E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}$.

证 $\Rightarrow$(i)，定义$\sigma_n=\min\{0\leqslant j\leqslant\tau\wedge n:\xi_j\geqslant\varepsilon\}$；$\sigma_n=\tau\wedge n$，若

$\{\cdots\}=\varnothing$. 则 σ_n 具有下列性质：σ_n 是有界 $\mathscr{F}_\cdot$-时；$\sigma_n \uparrow \tau$，(p-a.s)；$A_{\sigma_n} \leqslant A_\tau$，(p-a.s)；$E\xi_{\sigma_n} \leqslant EA_{\sigma_n}$. 由此可得

$$\varepsilon \cdot P\{\xi_{\sigma_n}^* \geqslant \varepsilon\} \leqslant \int_{\{\xi_{\sigma_n}^* \geqslant \varepsilon\}} \xi_{\sigma_n} \mathrm{d}P \leqslant E\xi_{\sigma_n} \leqslant EA_{\sigma_n} \leqslant EA_\tau.$$

注意：因为 $\{\xi_{\sigma_n}^* \geqslant \varepsilon\} \uparrow \{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon\}$，故由 Fatou 引理，有

$$P\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} EA_\tau.$$

$\Rightarrow$(ii)，定义 $\gamma=\inf\{j; A_{j+1} \geqslant a\}$；$\gamma=\infty$，若 $\{\cdots\}=\varnothing$. 由 A_{j+1} 是 $\mathscr{F}_j$-可测的可知：γ 是 $\mathscr{F}_\cdot$-时. 注意：$A_\gamma < a$. 于是，由 A 的增性质，有 $\{A_\tau < a\}=\{A_{\tau\wedge\gamma} < a\}$. 从而

$$\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon, A_\tau < a\}=\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon, A_\tau < a, \tau \leqslant \gamma\} \subseteq \{\xi_{\tau\wedge\gamma}^* \geqslant \varepsilon\};$$

$$\begin{aligned} P\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon\} &= P\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon, A_\tau < a\}+P\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon, A_\tau \geqslant a\} \\ &\leqslant P\{\xi_{\tau\wedge\gamma}^* \geqslant \varepsilon\}+P\{A_\tau \geqslant a\} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} EA_{\tau\wedge\gamma}+P\{A_\tau \geqslant a\}. \end{aligned}$$

注意：$EA_{\tau\wedge\gamma} \leqslant E(A_\tau \wedge a)$. 从而得所要求的结论.

$\Rightarrow$(iii)，$\|\xi_\tau^*\|_p^p = E|\xi_\tau^*|^p$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty P\{(\xi_\tau^*)^p \geqslant t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{\xi_\tau^* \geqslant t^{\frac{1}{p}}\}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^\infty t^{-\frac{1}{p}} E(A_\tau \wedge t^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}t + \int_0^\infty P\{A_\tau^p \geqslant t\}\mathrm{d}t \\ &= E(\int_0^{A_\tau^p} \mathrm{d}t) + E(\int_{A_\tau^p}^\infty A_\tau \cdot t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t + EA_\tau^p \\ &= \frac{2-p}{1-p} EA_\tau^p \quad (0 < p < 1). \end{aligned}$$

#

推论 4.2.2 设 $\xi=\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n \in T_\infty\}$ 为非负随机列，$A=\{A_n, \mathscr{F}_n, n \in T_\infty\}$ 为非负随机列，ξ 受 A 控制，且$\exists$ 常数 $c>0$，使得

$$P\{\sup_{k \geqslant 1} |\Delta A_k| \leqslant c\}=1,$$

则对$\forall$ $\varepsilon>0, a>0$ 及有限停时 τ，有

$$P\{\xi_\tau^* \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} E(A_\tau \wedge (a+c))+P(A_\tau \geqslant a).$$

证 定义 $\gamma=\inf\{j: A_j\geqslant a\}$; $\gamma=\infty$，若 $\{\cdots\}=\varnothing$. 则 γ 具有下列性质：γ 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$-时；$\{A_\tau<a\}=\{A_{\tau\wedge(\gamma-1)}<a\}$；及

$$A_{\tau\wedge\gamma}\leqslant|\Delta A_{\tau\wedge\gamma}|+A_{\tau\wedge(\gamma-1)}\leqslant a+c.$$

于是，类似于上述定理之证，有

$$\begin{aligned}p\{\xi_\tau^*\geqslant\varepsilon\}&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}EA_{\tau\wedge\gamma}+P(A_\tau\geqslant a)\\&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}E(A_\tau\wedge(a+c))+P(A_\tau\geqslant a).\end{aligned}$$

注 定理 4.2.2(ii)和推论 4.2.2 均不要求 A 具有增性质.

定理 4.2.3 设 $\xi=(\xi_n)n\geqslant1$ 为一个自生鞅，$\xi_n\in L_p$，$(p>1)$，则∃ 常数 $A_p=\left(\frac{18p^{3/2}}{p-1}\right)^{-1}$，$B_p=A_p^{-1}\cdot\sqrt{p-1}$，使得

$$A_p\cdot\|S_n(\xi)\|_p\leqslant\|\xi_n\|_p\leqslant B_p\cdot\|S_n(\xi)\|_p.$$

$$A_p\cdot\|S_n(\xi)\|_p\leqslant\|\xi_n^*\|_p\leqslant B_p\cdot\frac{p}{p-1}\cdot\|S_n(\xi)\|_p,$$

其中 $\quad S_n^2(\xi)=\sum_{k=1}^{n}(\Delta\xi_k)^2,\ \xi_0=0;\ \xi_n^*=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k.$

定理 4.2.4 设 $\xi=(\xi_n)n\geqslant1$ 为一个自生鞅，则∃ 常数 A，B：$0<A<B<\infty$，使得

$$A\cdot ES(\xi)\leqslant E\xi^*\leqslant B\cdot ES(\xi),$$

其中，$\xi^*=\sup_n|\xi_n|$；$S^2(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta\xi_i)^2\quad(\xi_0=0)$.

上述两条定理的证明比较复杂. 它们完整的证明可在[2]中找到.

推理 4.2.3 设 $M=(M_n)n\in T_\infty$ 为一个自生鞅，$M_0=0$ 且对某 $r\geqslant1$，有 $E|M_n|^{2r}<\infty$. 此外，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|\Delta M_n|^{2r}}{n^{1+\gamma}}<\infty$，则

$$\frac{M_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0(\text{p-a.s}).$$

即 M 服从强大数律.

证 首先考虑 $r=1$ 的情形，令

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta M_k}{k}, m_0 = 0. m_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k.$$

按 Kronecker 引理(见后附):若 m(a.s)收敛到某个 r.v.,则

$$\frac{M_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\Delta m_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0(\text{p-a.s}).$$

下面证明:m(a.s)收敛.

m(a.s)收敛⇔对∀ $\varepsilon>0$,有 $P\{\sup_{k\geqslant 1}|m_{n+k}-m_n|\geqslant\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$

注意:$(m_{n+k}-m_n)^2$ 是一个关于下标 $k\geqslant 1$ 的下鞅(因为 m 为鞅),按推论 4.2.1,有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant N}(m_{n+k}-m_n)^2) \leqslant 4E(m_{n+N}-m_n)^2 = 4\sum_{k=1}^{N}\frac{E(\Delta M_{n+k})^2}{(n+k)^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
P\{\sup_{k\geqslant 1}|m_{n+k}-m_n|\geqslant\varepsilon\} &= \lim_{N\to\infty} P\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}|m_{n+k}-m_n|\geqslant\varepsilon\}\\
&\leqslant \lim_{N\to\infty}\varepsilon^{-2}\cdot E(\max_{1\leqslant k\leqslant N}(m_{n+k}-m_n)^2)\\
&\leqslant \lim_{N\to\infty} 4\varepsilon^{-2}E(m_{n+k}-m_n)^2\\
&\leqslant 4\varepsilon^{-2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{E(\Delta M_k)^2}{k^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.
\end{aligned}$$

现在讨论 $\gamma>1$ 的情形.显然

$$\frac{M_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s}}0 \Leftrightarrow \text{对}\forall\ \varepsilon>0, P\{\sup_{k\geqslant n}\frac{|M_k|}{k}\geqslant\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

按定理 4.2.2,有

$$\begin{aligned}
P\{\sup_{k\geqslant n}\frac{|M_k|}{k}\geqslant\varepsilon\} &= \lim_{m\to\infty}P\{\max_{n\leqslant k\leqslant m}\frac{|M_k|}{k}\geqslant\varepsilon\}\\
&= \lim_{m\to\infty}P\{\max_{n\leqslant k\leqslant m}\frac{|M_k|^{2r}}{k^{2r}}\geqslant\varepsilon^{2r}\}\\
&\leqslant \lim_{m\to\infty}\varepsilon^{-2r}[E(\frac{|M_n|^{2r}}{n^{2r}}) + \sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{i^{2r}}(E|M_i|^{2r}-E|M_{i-1}|^{2r})]\\
&= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^{-2r}[E(\frac{|M_n|^{2r}}{m^{2r}}) + \sum_{i=n}^{m-1}a_i\cdot E(|M_i|^{2r})],
\end{aligned}$$

其中,$a_i = \frac{1}{i^{2r}} - \frac{1}{(i+1)^{2r}}$.

$$I_N \triangleq \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot E(|M_i|^{2r})$$

$$\leqslant B_{2r}^{2r} \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot E(\sum_{k=1}^{i} (\Delta M_k)^2)^r (\text{按 Burkholder 不等式})$$

$$\leqslant B_{2r}^{2r} \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i E(i^{r-1} \cdot \sum_{k=1}^{i} (\Delta M_k)^{2r}) (\text{由 Hölder 不等式}).$$

不难证明：$\frac{2r}{i+1} - \frac{r(2r-1)}{(i+1)^2} \leqslant a_i \cdot i^{2r} \leqslant \frac{2r}{i+1}$. 因此：$a_i \cdot i^{2r} = 0(\frac{1}{i})$.
于是，$\exists$ $c_1 > 0$，使得

$$I_N \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{N} i^{-2r-1+r-1} \cdot \sum_{k=1}^{i} E(\Delta M_k)^{2r} = C_1 \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i^{r+2}} E(\Delta M_k)^{2r}.$$

注意：$\sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i^{r+2}} \leqslant \frac{1}{r+1} [\frac{1}{k^{r+1}} - \frac{1}{N^{r+1}}]$. 故$\exists$ 常数 $C_2 > 0$，使得

$$I_N \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{r+1}} E(\Delta M_k)^{2r} \leqslant C_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(\Delta M_k)^{2r}}{k^{r+1}} < \infty.$$

$$\frac{E|M_m|^{2r}}{m^{2r}} \leqslant B_{2r}^{2r} \cdot E(\sum_{k=1}^{m} (\Delta M_k)^2)^r \cdot \frac{1}{m^{2r}} (\text{由 Burkholder 不等式}).$$

$$\leqslant B_{2r}^{2r} \cdot \frac{1}{m^{r+1}} \sum_{k=1}^{m} E(\Delta M_k)^{2r} (\text{由 Hölder 不等式})$$

$$= B_{2r}^{2r} \cdot \frac{1}{m^{r+1}} \sum_{k=1}^{m} k^{r+1} \cdot \frac{E(\Delta M_k)^{2r}}{k^{r+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

最后一步采用了假设条件和 Kronecker 引理. 综上分析，得：

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_{k\geqslant n} \frac{|M_k|}{k} \geqslant \varepsilon\} = 0, (\forall\ \varepsilon > 0). \qquad \#$$

注　Kronecker 引理：若 $0 < b_n \uparrow \infty$，$\sum x_n$ 收敛，则

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

§3　下穿不等式

下穿不等式是研究随机序列收敛性的重要工具. 本节讨论随

机下穿数概念及其估计.

设 $d_k, 1\leqslant k\leqslant n$，为 n 个实数，$a,b\in R$，且 $a<b$. 让数偶之集 $A_s^*=\{(d_{k_1},d_{k_2});(d_{k_3},d_{k_4});\cdots;(d_{k_{2s-1}},d_{k_{2s}})\}$具有下列性质：

(i) $\{k_1,k_2,\cdots,k_{2s}\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$，且 $k_r<k_{r+1}, 1\leqslant r\leqslant 2s-1$；

(ii) $d_{k_{2r-1}}\geqslant b, d_{k_{2r}}<a, r=1,\cdots,s$.

令 $\quad v_d^{(n)}[a,b)=\max\{s: A_s^*\subset\{d_k,1\leqslant k\leqslant n\}$，且 A_s^* 具有性质(i)和(ii)$\}$， (4. 3. 1)

则称 $v_d^{(n)}[a,b)$ 为数列 $\{d_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 关于区间 $[a,b)$ 的下穿数.

定义 4.3.1 设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$\{\zeta_i,i\in N\}$ 为随机变量族. 对于任意固定的 $\omega\in\Omega$，用 $\zeta_i(\omega)$ 代替(4.3.1)式中的 d_i 即可由此定义一个数 $v_\zeta^{(n)}[a,b)(\omega)$，则称 $v_\zeta^{(n)}[a,b)(\omega)$ 为 $\{\zeta_i,i\in N\}$ 关于 $[a,b)$ 的随机下穿数. 这是一个取值于 N 的随机变量.

定理 4.3.1 设 $\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$ 为一可积的随机变量序列. 定义 $\zeta_{-1}=\zeta_0,\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$. $\rho_k^{(-)}=\sum_{i=0}^{k}[E(\Delta\zeta_i|\mathscr{F}_{i-1})]^-$，其中 $\Delta\zeta_i=\zeta_i-\zeta_{i-1}$. 则对任意的 $n\geqslant 1$ 及 $a,b\in\mathbf{R}, a<b$，有

$$Ev_\zeta^{(n)}[a,b)\leqslant\frac{1}{b-a}E[(\zeta_n-b)^++\rho_n^{(-)}]. \tag{4.3.2}$$

证 首先作随机时列 $j_k, k=1,2,\cdots$，则

$j_1=\inf\{k:\zeta_k\geqslant b, 0\leqslant k\leqslant n\}$，$j_2=\inf\{k:\zeta_k<a, j_1<k\leqslant n\}$；

$\cdots$

$j_{2l-1}=\inf\{k:\zeta_k\geqslant b, j_{2(l-1)}<k\leqslant n\}$，

$j_{2l}=\inf\{k:\zeta_k<a, j_{2l-1}<k\leqslant n\}$，

其中 $l=1,2,\cdots$. $j_0=0$. $\inf\varnothing=n+1$. 定义 $\zeta_{n+1}=\zeta_n$.

由此构作的变量列 $j_k, k\geqslant 0$，具有下列性质：

(i) $j.$ 为一个单调非降的以 $n+1$ 为界的 $\mathscr{F}.$-时列.

事实上，易证：j_1 为 $\mathscr{F}.$-时. 若 j_r 为 $\mathscr{F}.$-时. 则

$$(j_{r+1}\leqslant k)=\{j_r<j_{r+1}\leqslant k\}=\bigcup_{l=1}^{k-1}(j_r=l)\cdot\{l+1\leqslant j_{r+1}\leqslant k\}.$$

而 $(j_r=l)\cdot\{l+1\leqslant j_{r+1}\leqslant k\}=(j_r=l)\cdot\bigcup_{l+1}^{k}(j_{r+1}=i)$

$$(j_r=l)\cdot(j_{r+1}=i)=\begin{cases}\{\zeta_t\geqslant b,l\leqslant t\leqslant i-1;\zeta_i<a\},\text{当 } r \text{ 为奇数时},\\ \{\zeta_t<a,l\leqslant t\leqslant i-1;\zeta_i\geqslant b\},\text{当 } r \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

由此可见：$(j_r=l)\cdot(j_{r+1}=i)\in\mathscr{F}_i,\forall\ i>l$. 于是

$$(j_{r+1}\leqslant k)\in\mathscr{F}_k\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

故 j_{i+1} 为 $\mathscr{F}_{\cdot}$—时.

(ii)令 $\Omega_i=\{\omega:j_i\leqslant n\}$，则 $\Omega_{i+1}\subset\Omega_i\quad(i\geqslant1)$，且 $\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i=\varnothing$.

事实上，按 j_i 之定义，若 $j_{i+1}\leqslant n$，则 $j_i\leqslant n$. 因此，$\Omega_{i+1}\subset\Omega_i$. 此外，当 $r\geqslant n+1$ 时，$\Omega_r=\varnothing$. 从而 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\Omega_i=\varnothing$.

$$\text{(iii)}\,\upsilon_\zeta^{(n)}[a,b)=\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m}}=\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{\Omega_{2m}}.\tag{4.3.3}$$

事实上，$\omega\in\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m}$表示相应于 ω 的数列$\{\zeta_k,1\leqslant k\leqslant n\}$已下穿区间$[a,b)m$ 次. 而 $\chi_{\Omega_{2m-1}\Omega_{2m}}(\omega)$表示 $\zeta_\cdot(\omega)$在第 m 次下穿$[a,b)$时记录 1，否则不记录. 于是，(4.3.3)式成立.

(iv)$\zeta_{j_{2m}}=\zeta_n$ 于 $\Omega_{2m-1}\backslash\Omega_{2m}$上

事实上，按 $j_\cdot$ 之定义，当 $\omega\bar{\in}\Omega_{2m}$时，$j_{2m}=n+1$. 因此

$$\zeta_{j_{2m}}(\omega)=\zeta_{n+1}(\omega)=\zeta_n(\omega).$$

现在，要利用上述各性质来估计 $\upsilon_\zeta^{(n)}[a,b)$.

从(ii)和(iii)中推出：

$$E\upsilon_\zeta^{(n)}[a,b)=\sum_{m=1}^{\infty}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})=\sum_{m=1}^{\infty}P(\Omega_{2m}),\tag{4.3.4}$$

$$\begin{aligned}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})&\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m}}(\zeta_{j_{2m-1}}-\zeta_{j_{2m}})\mathrm{d}P\\&=\frac{1}{b-a}\Big[\int_{\Omega_{2m-1}}(\zeta_{j_{2m-1}}-\zeta_{j_{2m}})\mathrm{d}P\\&\quad-\int_{\Omega_{2m-1}\backslash\Omega_{2m}}(\zeta_{j_{2m-1}}-\zeta_{j_{2m}})\mathrm{d}P\Big].\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

注意：$\Omega_{2m-1}\in\mathscr{F}_{j_{2m-1}}$，$j_{2m-1}\leqslant j_{2m}$. 于是，按引理 4.2.1

$$\int_{\Omega_{2m-1}}(\zeta_{j_{2m-1}}-\zeta_{j_{2m}})\mathrm{d}P\leqslant\int_{\Omega_{2m-1}}(\rho_{j_{2m}}^{(-)}-\rho_{j_{2m-1}}^{(-)})\mathrm{d}P.$$

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_{j_{2m-1}}-\zeta_{j_{2m}})\mathrm{d}P&=\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_n-\zeta_{j_{2m-1}})\mathrm{d}P.\\&\leqslant\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_n-b)\mathrm{d}P\\&\leqslant\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_n-b)^{+}\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

将上述关系式代入(4.3.5)式可得

$$\begin{aligned}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})\leqslant\frac{1}{b-a}\Big[&\int_{\Omega_{2m-1}}(\rho_{j_{2m}}^{(-)}-\rho_{j_{2m-1}}^{(-)})\mathrm{d}P\\&+\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_n-b)^{+}\,\mathrm{d}P\Big].\end{aligned}\qquad(4.3.6)$$

因 n 有限，必∃ 正整数 m_0，$\ni\Omega_{2m_0}\neq\varnothing$，$\Omega_{2(m_0+1)}=\varnothing$，于是，由(4.3.6)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})&=\sum_{m=1}^{m_0}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\Big[\sum_{m=1}^{m_0}\int_{\Omega_{2m-1}}(\rho_{j_{2m}}^{(-)}-\rho_{j_{2m-1}}^{(-)})\mathrm{d}P\\&\qquad+\sum_{m=1}^{m_0}\int_{\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}}(\zeta_n-b)^{+}\,\mathrm{d}P\Big].\end{aligned}$$

注意：$\Omega_{2m-1}\subset\Omega_1$，$\rho_{j_{2m}}^{(-)}-\rho_{j_{2m-1}}^{(-)}\geqslant0$，$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\Omega_{2m-1}\setminus\Omega_{2m}\subset\Omega_1$. 故最后，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}P(\Omega_{2m-1}\cdot\Omega_{2m})&\leqslant\frac{1}{b-a}\Big[\sum_{m=1}^{m_0}\int_{\Omega_1}(\rho_{j_{2m}}^{(-)}-\rho_{j_{2m-1}}^{(-)})\mathrm{d}P\\&\qquad+\int_{\Omega_1}(\zeta_n-b)^{+}\,\mathrm{d}P\Big].\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\Big[\sum_{m=1}^{2m_0}\int_{\Omega_1}(\rho_{j_m}^{(-)}-\rho_{j_{m-1}}^{(-)})\mathrm{d}P\\&\qquad+\int_{\Omega_1}(\zeta_n-b)^{+}\,\mathrm{d}P\Big]\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a} E[\rho_n^{(-)} + (\zeta_n - b)^+].$$

将此代入(4.3.4)式即得(4.3.5)式. #

推论 4.3.1 假定$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$为鞅或下鞅. 则对任意$n \geqslant 1, a, b \in R$, 且$a < b$, 有

$$Ev_\zeta^{(n)}[a,b) \leqslant \frac{1}{b-a} E(\zeta_n - b)^+. \tag{4.3.7}$$

证 在引入$\zeta_{-1} = \zeta_0$和$\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$后, $\zeta.$仍为鞅或下鞅, 又鞅为下鞅的特例. 对于下鞅的$\zeta.$, 有

$$\rho_n^{(-)} = \sum_{k=0}^{n} [E(\Delta\zeta_k | \mathscr{F}_{k-1})]^- = 0,$$

于是, 此推论中的不等式(4.3.7)就是(4.3.2)的特例.

注 假定$\bar{v}_\zeta^{(n)}(a,b]$表示$\zeta.$关于$(a,b]$的上穿数. 那么, 当$\zeta.$为上鞅时, $-\zeta.$为下鞅. 而上穿数$\bar{v}_\zeta^{(n)}(a,b]$就等于下穿数$v_{-\zeta}^{(n)}(a,b]$. 于是, 由公式(4.3.7), 我们可得

$$E\bar{v}_\zeta^{(n)}(a,b] \leqslant \frac{1}{b-a} E(\zeta_n - a)^-. \tag{4.3.8}$$

如果$\zeta.$满足定理 4.3.1 的要求, 则上穿数具有如下估计

$$E\bar{v}_\zeta^{(n)}(a,b] \leqslant \frac{1}{b-a} E[\rho_n^{(+)} + (\zeta_n - a)^-]. \tag{4.3.9}$$

定义 4.3.2 设$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$为一随机序列. 定义: $\zeta_{-1} = \zeta_0, \mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$. 显然, 下穿数$v_\zeta^{(n)}[a,b)$关于$n$是一个单调不减序列. 从而, $\{v_\zeta^{(n)}[a,b), n \geqslant 1\}$有极限存在. 令

$$v_\zeta(a,b) = \lim_{n \to \infty} v_\zeta^{(n)}[a,b) \quad (\text{a.c}).$$

则称$v_\zeta(a,b)$为随机序列$\zeta.$的关于区间$[a,b)$的下穿数. (类似地也可以定义$\zeta.$关于区间$(a,b]$的上穿数

$$\bar{v}_\zeta(a,b) = \lim_{n \to \infty} v_{-\zeta}^{(n)}[-b,-a) \quad (\text{a.c}).$$

即是说: $\bar{v}_\zeta(a,b) = v_{-\zeta}(-b,-a) \quad (\text{a.c})$.

定理 4.3.2 设$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$为一个可积随机序列, 则对$\forall\ c > 0, p > 1, a < b$, 下列不等式成立:

$$P(\sup_{n\in T_\infty}\zeta_n \geqslant c)\leqslant \frac{1}{c}\sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)}),$$

$$E(\sup_{n\in T_\infty}\zeta_n^+)^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)})^p.$$

$$E(v_\zeta(a,b))\leqslant \frac{1}{b-a}\sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)}),$$

其中 $\rho_n^{(-)}=\sum_{k=0}^{\infty}[E(\Delta\zeta_k|\mathscr{F}_{k-1})]^-$，$\Delta\zeta_k=\zeta_k-\zeta_{k-1}$，$\zeta_{-1}=\zeta_0$，$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$.

证 引用 Fatou 引理，定理 4.2.2，及定理 4.3.1 即可得到此定理中的三个不等式. #

定理 4.3.3 若可积随机列 $\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$ 满足条件

(a) $\sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)})<\infty$ 或 (b) $\sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^- + \rho_n^{(+)})<\infty$,

则 $\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\zeta_n$，且 ζ_∞ 为 r.v.

若条件(a)成立，则 $E\zeta_\infty^+<\infty$.

若条件(b)成立，则 $E\zeta_\infty^-<\infty$.

若条件(a)，(b)同时成立，则 $E|\zeta_\infty|<\infty$.

证 如果用 $\zeta_n^*=-\zeta_n$ 代替 ζ_n，则关于 ζ_n 的条件(b)就被转化成关于 ζ_n^* 的条件(a). 因此，我们仅需证明在条件(a)下的结论.

现假定条件(a)成立. 注意：

$$E[(\zeta_n-b)^+ + \rho_n^{(-)}]\leqslant b^- + E\zeta_n^+ + E\rho_n^{(-)}.$$

因此，对 $\forall\ a,b\in R$ 且 $a<b$，有

$$Ev_\zeta(a,b)\leqslant \frac{1}{b-a}[b^- + \sup_{n\in T_\infty}E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)})]<\infty.$$

于是，$v_\zeta(a,b)$ 是(a.c)有限的. 由此即知

$$\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\zeta_n.$$

下面证明：ζ_∞ 是(a.c)有限的.

一方面：$E\zeta_\infty=E\underline{\lim}\zeta_n\leqslant\underline{\lim}E\zeta_n^+\leqslant\sup_{n\in T_\infty}E\zeta_n^+<\infty.$

从而，$\zeta_\infty<\infty$(a.c).

另一方面：$\zeta_\infty > -\infty$ (a.c).

事实上，若不然，即 $P(\zeta_\infty = -\infty) > 0$. 注意：对$\forall\ n \geq 1$，$\zeta_n$ 为 r.v. 从而，$\exists\ b \in R$ 和某 $C > 0$，使得

$$P(v_\zeta(a,b) \geq 1) \geq C \quad (\forall\ a < b),$$

即
$$Ev_\zeta(a,b) \geq C > 0 \quad (\forall\ a < b). \tag{4.3.10}$$

然而，由条件(a)可知：$\exists\ a_0 < b$，使得

$$Ev_\zeta(a_0,b) \leq \frac{1}{b-a_0}\sup_{n\geq 1}(b^- + E(\zeta_n^+ + \rho_n^{(-)})) < C.$$

这与(4.3.10)式矛盾. 故只能有 $P(\zeta_\infty = -\infty) = 0$.

这就证明了 ζ_∞ 为 r.v. 定理的其它部分可利用 Fatou 引理证明.

定义4.3.3 若可积随机变量列$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$满足条件

$$(\rho_\infty^{(+)} + \rho_\infty^{(-)}) < \infty. \tag{4.3.11}$$

其中，$\rho_\infty^{(\pm)} = \lim\limits_{n\to\infty}\rho_n^{(\pm)}$，则称此随机列为拟鞅.

注意：$\rho_n^{(\pm)}$ 为单调序列，因此，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n^{(\pm)}$ 存在. 此外，由单调收敛定理可得 $E\rho_\infty^{(\pm)} = \sup\limits_{n\geq 1} E\rho_n^{(\pm)}$.

引理4.3.1 鞅必为拟鞅. 若$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$为半鞅，且$\sup\limits_k E|\zeta_k| < \infty$，则此半鞅必为拟鞅.

证 对于鞅，(4.3.11)式自然成立. 在半鞅的情形下，如下鞅. $E\rho_n^{(+)} = \sum\limits_{k=1}^{n} E\Delta\zeta_k = E(\zeta_n - \zeta_0)$. $E\rho_n^{(-)} = 0$，于是

$$E(\rho_\infty^{(+)} + \rho_\infty^{(-)}) = \sup_n E\rho_n^{(+)} \leq \sup_n E|\zeta_n| + E|\zeta_0| < \infty,$$

故此上鞅为拟鞅. 同理可证下鞅情形结论成立. #

引理4.3.2 任意拟鞅$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$都可分解成如下形式：

$$\zeta_n = \eta_n + \gamma_n \quad (\forall\ n \in T_\infty),$$

其中，$\eta_.$ 为鞅，而 $\gamma_.$ 为这样的随机列，即对$\forall\ n \geq 1$，γ_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的，且 $\gamma_0 = 0$.

证 设$\zeta_{-1}=\zeta_0$，$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$. 让

$$\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}E(\Delta\zeta_k|\mathscr{F}_{k-1}),\Delta\zeta_k=\zeta_k-\zeta_{k-1},$$

$$\eta_n=\zeta_n-\gamma_n,$$

则 $\eta.$，$\gamma.$ 满足引理中的要求.

事实上，对$\forall\ n\in T_\infty$，有

$$\begin{aligned}E(\eta_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=E(\zeta_{n+1}-\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=E[\zeta_0+\sum_{k=0}^{n+1}(\Delta\zeta_k-E(\Delta\zeta_k|\mathscr{F}_{k-1}))|\mathscr{F}_n]\\&=E[\zeta_0+\sum_{k=0}^{n}(\Delta\zeta_k-E(\Delta\zeta_k|_{k-1}))|\mathscr{F}_n]\\&=\zeta_n-\gamma_n=\eta_n,\end{aligned}$$

故 $\eta.$ 为鞅. 此外，$E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\gamma_{n+1}$，$(n\in T_\infty)$，故 γ_{n+1}是 $\mathscr{F}_n$-可测的. #

§4 半鞅的右闭性

如果随机列$\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$为半鞅，则在定理4.3.3中的条件(a)和(b)是等价的. 这是因为

(i)对于上鞅：$E(\zeta_n^++\rho_n^{(+)})=E\zeta_n^-$，

$$E(\zeta_n^++\rho_n^{(-)})=E(\zeta_n^++\zeta_0-\zeta_n)=E(\zeta_n^-+\zeta_0);$$

(ii)对于下鞅：$E(\zeta_n^++\rho_n^{(-)})=E\zeta_n^+$，

$$E(\zeta_n^-+\rho_n^{(+)})=E(\zeta_n^+-\zeta_0);$$

(iii)对于鞅：$E(\zeta_n^++\rho_n^{(-)})=E\zeta_n^+=E\zeta_0+E\zeta_n^-=\zeta_0+E(\zeta_n^-+\rho_n^{(+)})$. 这样，得到如下结论.

推论4.4.1 设$\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$为半鞅，且满足如下条件：

当它为上鞅时， $\sup\limits_n E\zeta_n^-<\infty$， (4.4.1)

当它为鞅或下鞅时： $\sup\limits_n E\zeta_n^+<\infty$， (4.4.2)

则 $\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n$，且 $E|\zeta_\infty|<\infty$.

像在第三章§3中那样，在(4.4.1)式或(4.4.2)式成立的条件下，$\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in\overline{T}_\infty\}$为一可积随机列. 那么这样的随机列是否保持半鞅的性质呢?就一般而言，结论是否定的. 下面的例说明了这一点.

例4.4.1 设$\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}$为$[0,1]$上的Borel集全体，其概率P为Lebesque测度. 记$A_{ni}=[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})$，$1\leqslant i\leqslant 2^n$. $\mathscr{F}_n=\sigma(\{A:A=A_{ni},1\leqslant i\leqslant 2^n\})$. $\zeta_n(x)=\begin{cases}2^n,\text{如果 } x\in A_{n1},\\ 0,\text{其它},\end{cases}\quad x\in\Omega$，

那么，$E|\zeta_n|=\int_{A_{n1}}\zeta_n\mathrm{d}P=2^nP(A_{n1})=1$，且

$$E(\zeta_{n+1}|\mathscr{F}_n)=a_{ni}\text{，当 } x\in A_{ni}\text{时，}1\leqslant i\leqslant 2^n,$$

其中，$a_{n1}=2^n$，$a_{ni}=0$，$i\neq 1$，于是，$E(\zeta_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\zeta_n\quad(n\geqslant 1)$. 因此，$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为鞅，且$E\zeta_n=1\quad(\forall\ n\geqslant 1)$.

但是，$\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=0$，$\zeta_\infty\in L_1$，且$E\zeta_\infty=0$. 可见，$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$为一个可积随机列. 然而，它却不是鞅.

这个例表明：有必要找到某些条件使半鞅ζ在引入随机元$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$后仍保持其半鞅性不变.

定义4.4.1 设$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup\limits_{k\in T_\infty}\mathscr{F}_k)$，$\zeta_\infty$为$\mathscr{F}_\infty$-可测的可积变量，$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为半鞅. 若$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in\overline{T}_\infty\}$亦为半鞅，则称半鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$右闭. $(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为其右闭元.

从此定义中可以看出：$\zeta_\infty\in L_1$是否能使$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$成为半鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$的右闭元，应验证下列三条：

(i)ζ_∞必须是$\mathscr{F}_\infty$-可测的；

(ii)$E|\zeta_\infty|<\infty$；

(iii)$\zeta_n\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)$，$\begin{pmatrix}\text{下鞅}\\ \text{鞅}\\ \text{上鞅}\end{pmatrix}(\forall\ n\in T_\infty)$.

这里要说明一点：右闭元一般不唯一. 例如，若$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为下

鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$的右闭元，则$(\zeta_\infty+1,\mathscr{F}_\infty)$亦为右闭元. 因此，这就出现最近右闭元问题. 本节不讨论这个问题. 只考虑在什么条件下右闭元存在.

定理4.4.1 非负下鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$具有右闭元的充要条件是$\{\zeta_n,n\in T_\infty\}$一致可积.

证 必要性. 设$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为右闭元，则

$$\zeta_n\leqslant E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\quad(\forall\ n\in T_\infty). \tag{4.4.3}$$

于是，对$\forall\ c>0$，有

$$\sup_{n\in T_\infty}\int_{\{\zeta_n>c\}}\zeta_n\mathrm{d}p\leqslant\sup_{n\in T_\infty}\int_{\{\zeta_n>c\}}E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\mathrm{d}p$$
$$=\sup_{n\in T_\infty}\int_{\{\zeta_n>c\}}\zeta_\infty\mathrm{d}P\leqslant\int_{\{\sup\limits_n\zeta_n>c\}}\zeta_\infty\mathrm{d}P.$$

定义如下$\mathscr{F}_\cdot$-时：

$$\tau=\inf\{n:\zeta_n>c,n\in T_\infty\},\inf\varnothing=\infty.$$

不难验证：τ确实为一个$\mathscr{F}_\cdot$-时. 记$\Omega_\tau=\{\tau\in T_\infty\}$，则

$$P(\sup_n\zeta_n>c)=P(\Omega_\tau)=E\chi_{\Omega_\tau}$$
$$\leqslant\frac{1}{c}E(\zeta_\tau\cdot\chi_{\Omega_\tau})=\frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}E\Big(\sum_{i=0}^{k}\Delta\zeta_i\cdot\chi_{(\tau=k)}\Big).$$

这里定义$\zeta_{-1}=0$. 由此即得

$$P(\Omega_\tau)\leqslant\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}E(\Delta\zeta_i\cdot\chi_{(\tau=k)})$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{\infty}E(\Delta\zeta_i\cdot\chi_{(\tau\geqslant i)}). \tag{4.4.4}$$

注意：$(\tau\geqslant i)\in\mathscr{F}_{i-1}$. 定义$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}$，则利用下鞅性可得

$$E(\Delta\zeta_i\cdot\chi_{(\tau\geqslant i)})=E[\chi_{(\tau\geqslant i)}E(\Delta\zeta_i|\mathscr{F}_{i-1})]$$
$$\leqslant E[E(\Delta\zeta_i|\mathscr{F}_{i-1})]=E\Delta\zeta_n.$$

将此不等式代入(4.4.4)式中，并考虑到(4.4.5)式，立即得到

$$P(\Omega_\tau)\leqslant\frac{1}{c}\sup_n E\zeta_n\leqslant\frac{1}{c}E\zeta_\infty\to0\text{，当}\ c\to\infty\text{时，}$$

故 $\limsup\limits_{c\to\infty}\sup\limits_n\int_{\{\zeta_n>c\}}\zeta_n dP=0$. 从而，$\{\zeta_n, n\in T_\infty\}$一致可积.

充分性. 假定$\{\zeta_n, n\in T_\infty\}$一致可积. 则$\sup\limits_n E\zeta_n<\infty$. 按推论4.4.1，$\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n$，且$\zeta_\infty\in L_1$. 由一致可积性，$E|\zeta_n-\zeta_\infty|\to 0$当$n\to\infty$时. 于是，对$\forall\ n\in T_\infty$，有

$$E|E(\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)|\leqslant EE(|\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)$$
$$=E|\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\to 0\text{当 } m\to\infty\text{时},$$

从而，$E(\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\to 0$(a.c)当$m\to\infty$时. 注意，对$\forall\ m\in T_\infty$，

$$\zeta_n\leqslant E(\zeta_{n+m}|\mathscr{F}_n)=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)+E(\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n),$$

故 $\zeta_n\leqslant E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)$ (a.c). 于是：$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为右闭元.

推论4.4.2 鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n, n\in T_\infty\}$右闭的充要条件是$\{\zeta_n, n\in T_\infty\}$一致可积.

证 鞅ζ右闭表明：∃ 随机元$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，∃ $\{\zeta_n,\mathscr{F}_n, n\in \overline{T}_\infty\}$为鞅. 于是，$\{|\zeta_n|,\mathscr{F}_n, n\in \overline{T}_\infty\}$为非负下鞅. 按定理4.4.1. $\{|\zeta_n|, n\in T_\infty\}$一致可积. 从而，$\{\zeta_n, n\in T_\infty\}$一致可积.

反之，若$\{\zeta_n, n\in T_\infty\}$一致可积，则非负下鞅$\{\zeta_n^+,\mathscr{F}_n, n\in T_\infty\}$和$\{\zeta_n^-,\mathscr{F}_n, n\in T_\infty\}$均为一致可积. 于是，按定理4.4.1，它们右闭，其右闭元分别为$(\zeta_\infty^+,\mathscr{F}_\infty)$和$(\zeta_\infty^-,\mathscr{F}_\infty)$. 让

$$\zeta_\infty=\zeta_\infty^+-\zeta_\infty^-,\text{其中 } \zeta_\infty^\pm=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\zeta_n^\pm,$$

则$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为鞅的右闭元. 这是因为一致可积导致$E(\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\to 0$(a.c)当$m\to\infty$时. 这样，对$\forall\ n,m\in T_\infty$，有$\zeta_n=E(\zeta_{n+m}|\mathscr{F}_n)=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)+E(\zeta_{n+m}-\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)$. 从而，得

$$\zeta_n=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\quad(\forall\ n\in T_\infty).$$

推论4.4.3 下鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n, n\in T_\infty\}$右闭的充要条件是$\{\zeta_n^+, n\in T_\infty\}$一致可积.

证 下鞅ζ右闭表明：∃ 右闭元$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，使得

$$\zeta_n\leqslant E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n)\quad(\forall\ n\in T_\infty).$$

由 Jensen 不等式可推出：$\zeta_n^+\leqslant E(\zeta_\infty^+|\mathscr{F}_n)$，于是，$(\zeta_\infty^+,\mathscr{F}_\infty)$为下鞅$\zeta^+$的右闭元. 从而，按定理4.4.1，$\{\zeta_k^+, k\in T_\infty\}$一致可积.

反之，若$\{\zeta_k^+, k\in T_\infty\}$一致可积，则下鞅$\{\zeta_k^+,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$具有右闭元$(\zeta_\infty^+,\mathscr{F}_\infty)$. 于是，$\zeta_k^+\leqslant E(\zeta_\infty^+|\mathscr{F}_k)$. 然而

$$\zeta_k\leqslant E(\zeta_{k+1}|\mathscr{F}_k)\leqslant E(\zeta_{k+1}^+|\mathscr{F}_k)\leqslant E(\zeta_\infty^+|\mathscr{F}_k),$$

故$(\zeta_\infty^+,\mathscr{F}_\infty)$为下鞅$\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k,\in T_\infty\}$的右闭元.

注 易证明：对于右闭下鞅$\zeta_\cdot$，按推论4.4.1，$\zeta_\infty=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n$存在，且$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为其右闭元. 这是一个最近右闭元.

推论4.4.4 上鞅$\zeta_\cdot$右闭的充要条件是$\{\zeta_n^-,n\in T_\infty\}$一致可积.

定理4.4.2 若$\eta\in L_1$，则

$$E(\eta|\mathscr{F}_\infty)=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}E(\eta|\mathscr{F}_n). \qquad (4.4.5)$$

证 令$\zeta_n=E(\eta|\mathscr{F}_n)$，$\zeta_\infty=E(\eta|\mathscr{F}_\infty)$. 因为

$$|\zeta_n|\leqslant E(|E(\eta|\mathscr{F}_\infty)||\mathscr{F}_n)=E(|\zeta_\infty||\mathscr{F}_n),$$

所以，$|\zeta_\cdot|$为右闭下鞅，且$(|\zeta_\infty|,\mathscr{F}_\infty)$为其右闭元. 按定理4.4.1，$\{|\zeta_n|,n\in T_\infty\}$一致可积. 从而，$\zeta_\cdot$一致可积. 注意：

$$\zeta_n=E(\eta|\mathscr{F}_n)=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_n) \quad (\forall\ n\in T_\infty).$$

因此，$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为$\zeta_\cdot$的右闭元.

由推论4.4.1，a. $\text{c-}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=\zeta'_\infty\in L_1$. 由$\zeta_\cdot$的一致可积性有$\zeta_n=E(\zeta'_\infty|\mathscr{F}_n)$. 现在，我们要证明：$\zeta_\infty=\zeta'_\infty$.

对$\forall\ A\in\bigcup\limits_{n\in T_\infty}\mathscr{F}_n$，有

$$\int_A(\zeta'_\infty-\eta)\mathrm{d}P=0. \qquad (4.4.6)$$

事实上，$\exists\ A_n\in\mathscr{F}_n$，$\ni A=\bigcup\limits_{n\in T_\infty}A_n$，$A_k\cdot A_l=\varnothing\quad(k\neq l)$，于是

$$\begin{aligned}\int_A(\zeta'_\infty-\eta)\mathrm{d}P&=\sum_{n\in T_\infty}\int_{A_n}(\zeta'_\infty-\eta)\mathrm{d}P\\&=\sum_{n\in T_\infty}\int_{A_n}E(\zeta'_\infty-\eta|\mathscr{F}_n)\mathrm{d}P\\&=\sum_{n\in T_\infty}\int_{A_n}[\zeta_n-E(\eta|\mathscr{F}_n)]\mathrm{d}P=0.\end{aligned}$$

注意：$\Omega\in\bigcup_{n\in T_\infty}\mathscr{F}_n$，且$\bigcup\mathscr{F}_n$为$\pi$-类，且在$\bigcup\mathscr{F}_n$上(4.4.6)式成立．又$\zeta'_\infty$是$\mathscr{F}_\infty$-可测的．故按定理2.2.1(ii)，有

$$\zeta'_\infty=E(\eta|\mathscr{F}_\infty)=\zeta_\infty.$$

推论4.4.5 (Doob-Levy 定理)．设$\xi,\xi_n\in L_1$ $(n\in T_\infty)$，且$L_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，则

$$\zeta_n\xrightarrow{L_1}\eta \quad 当\ n\to\infty时，\tag{4.4.7}$$

其中$\zeta_n=E(\xi_n|\mathscr{F}_n)$，$(n\in T_\infty)$；$\eta=E(\xi|\mathscr{F}_\infty)$．

证 令 $\eta_n=E(\eta|\mathscr{F}_n)=E(\xi|\mathscr{F}_n)$ $(n\in T_\infty)$，则按定理4.4.2，有

$$\eta=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\eta_n.$$

显然，鞅$\eta.$是右闭的．因此，还有

$$L_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\eta_n=\eta.$$

注意：
$$E|\zeta_n-\eta|\leqslant E|\zeta_n-\eta_n|+E|\eta_n-\eta|.\tag{4.4.8}$$

我们已证明：$E|\eta_n-\eta|\to0$，当$n\to\infty$时．于是，按(4.4.8)式，为得到结论(4.4.7)，仅须证明

$$E|\zeta_n-\eta_n|\to0，当\ n\to\infty时.$$

然而，由 Jensen 不等式，可推出

$$E|\zeta_n-\eta_n|\leqslant E|\xi_n-\xi|\to0，当\ n\to\infty时.$$

定理4.4.3 (i)鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$右闭的充要条件是：对任意单调不减的$\mathscr{F}.$-时列$\{\tau_k,k\in T_\infty\}$，$\{\zeta_{\tau_k},\mathscr{F}_{\tau_k},k\in T_\infty\}$为右闭鞅．

(ii)半鞅$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$右闭的充要条件是：对任意单调不减的有限$\mathscr{F}.$-时列$\{\tau_k,k\in T_\infty\}$，$\{\zeta_{\tau_k},\mathscr{F}_{\tau_k},k\in T_\infty\}$为右闭半鞅．

证 结论(i)和(ii)的充分性是显然的，因为$\{\tau_k=k,k\in T_\infty\}$就是一个$\mathscr{F}.$-时列．下面证明条件的必要性．

首先，假定：$\zeta.$为右闭鞅．那么，$\exists$ 右闭元$(\zeta_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，$\ni\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\overline{\in}_\infty\}$为鞅．对$\forall\ \mathscr{F}.$-时$\tau$，令$\zeta_\tau=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_\tau)$．若$\tau_n\uparrow\tau$，则$E(\zeta_\tau|\mathscr{F}_{\tau_n})=E(E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_\tau)|\mathscr{F}_{\tau_n})=E(\zeta_\infty|\mathscr{F}_{\tau_n})=\zeta_{\tau_n}$．故$(\zeta_\tau,\mathscr{F}_\tau)$

为$\{\zeta_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n\in T_\infty\}$的右闭元. 这就是结论(i).

其次证明结论(ii)的必要性.

右闭上鞅反号即为右闭下鞅. 因此,不妨设ζ为右闭上鞅,即$\exists\ \eta\in L_1$,$\ni\zeta_n\geqslant E(\eta|\mathscr{F}_n)\quad(n\in T_\infty)$. 令

$$\bar{\zeta}_n=\zeta_n-E(\eta|\mathscr{F}_n)\quad(n\in T_\infty),$$

则$\bar{\zeta}$. 为非负上鞅. 因此,不妨假定ζ为非负上鞅.

按此引理3.3.2,对任意有限停时τ,ζ_τ为r.v.. 注意:对$\forall\ k\in T_\infty$,令$\tau=\tau_k$,$\tau^n=\tau\wedge n\quad(n\geqslant1)$,则由定理4.1.4知:$E\zeta_{\tau_n}\leqslant E\zeta_0$. 按照 Fatou 引理,

$$E\zeta_\tau=E\varliminf_{n\to\infty}\zeta_{\tau n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E\zeta_{\tau n}\leqslant E\zeta_0,$$

故$\zeta_\tau\in L_1$. 于是,剩下的问题是证明:对$\forall$有限$\mathscr{F}$.-时τ、σ,且$\tau\leqslant\sigma$,有$\quad E(\zeta_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\zeta_\tau$.

对$\forall\ n\in T_\infty$,定义$\sigma^n=\sigma\wedge n$,$\tau^n=\tau\wedge n$,则τ^n,σ^n均为以n为界的$\mathscr{F}$.-时,且$\tau^n\leqslant\sigma^n$. 于是,按定理4.1.1,有

$$\zeta_{\tau^n}\geqslant E(\zeta_{\sigma^n}|\mathscr{F}_{\tau^n})\quad(n\geqslant1).\tag{4.4.9}$$

显然,$\mathscr{F}_\tau=\sigma(\bigcup\limits_n\mathscr{F}_{\tau^n})$,$\zeta_{\tau^n}\xrightarrow[n\to\infty]{L_1}\zeta_\sigma$. 于是,由推论4.4.5,得

$$E(\zeta_{\sigma^n}|\mathscr{F}_{\tau^n})\xrightarrow[n\to\infty]{L_1}E(\zeta_\sigma|\mathscr{F}_\tau).$$

如有必要选子列,因此,不妨假定上述极限(a.c)成立. 于是,在(4.4.9)式两边关于n取极限即可得

$$\zeta_\tau\geqslant E(\zeta\sigma|\mathscr{F}_\tau),$$

故$\{\zeta_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n\in T_\infty\}$为非负上鞅,而非负上鞅自然右闭. 这就证明了结论(ii)的必要性.

例4.4.2 考虑"0—1"律 设ζ_n,$n\geqslant1$,为独立的r.v.列,$\mathscr{F}_n^\xi=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,$\mathscr{F}_\xi^n=\sigma(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots)\quad(n\geqslant1)$. $\mathscr{K}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n^\xi$(称为尾$\sigma$-代数). 显然,$\mathscr{K}\subseteq\mathscr{F}_\infty^\xi$. 由 Levy 定理,对$\forall\ A\in\mathscr{K}$,有

$$E(\chi_A|\mathscr{F}_n^\xi)\xrightarrow[n\to\infty]{}E(\chi_A|\mathscr{F}_\infty^\xi)=\chi_A\quad(\text{p-a.s}).$$

另一方面，$\mathscr{X}$ 独立于 $\mathscr{F}_n^\xi$ $(n\geq 1)$. 因此，$E(\chi_A|\mathscr{F}_n^\xi)=E\chi_A$. 从而 $\chi_A=E\chi_A=P(A)$ (p-a.s). 这表明 $\mathscr{X}$ 中的任意事件要么具有概率1要么具有概率0.

例4.4.3 设 $f=f(x)$在$[0,1)$上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 L，使得：$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L\cdot|x_1-x_2|$，$(\forall\ x_1,x_2\in[0,1))$，则存在一个 Lebesque 可积函数 $g=g(x)$，使得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x g(y)\mathrm{d}y \quad (\forall\ x\in[0,1)).$$

证 设 $\Omega=[0,1)$. $\mathscr{F}=\mathscr{B}([0,1))$，$P$ 为 Lebesque 测度. 定义：

$$\xi_n=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{(\frac{k-1}{2^n}\leqslant x<\frac{k}{2^n})} \quad (n\geqslant 1),$$

则 $P\{\xi_{n+1}=\xi_n/\xi_n\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{\xi_{n+1}=\xi_n+2^{-(n+1)}/\xi_n\}=\dfrac{1}{2}$. 让

$$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sigma(\xi_n),S_n=\frac{f(\xi_n+2^{-n})-f(\xi_n)}{2^{-n}} \quad (n\geqslant 1),$$

则 $S=\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为鞅.

事实上，$E|S_n|\leqslant 2^nE|f(\xi_n+2^{-n})-f(\xi_n)|\leqslant 2^nL2^{-n}=L<\infty$，因此，$S_n\in L_1$. 此外

$$\begin{aligned}E(S_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=E(S_{n+1}|\xi_n)\\&=2^{(n+1)}E(f(\xi_{n+1}+2^{-(n+1)})-f(\xi_{n+1})|\xi_n)\\&=2^{(n+1)}\{[f(\xi_n+2^{-(n+1)})-f(\xi_n)]\frac{1}{2}+[f(\xi_n+2^{-n})\\&\quad -f(\xi_n+2^{-(n+1)})]\frac{1}{2}\}\\&=2^n[f(\xi_n+2^{-n})-f(\xi_n)]=S_n \quad (n\geqslant 1).\end{aligned}$$

因为$\sup\limits_n E|S_n|\leqslant L<\infty$. 因此，按推论4.4.1，即得

$$S_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s}}S_\infty\in L_1.$$

又$|S_n|\leqslant L<\infty$，故由控制收敛定理，有

$$S_n=E(S_\infty|\mathscr{F}_n) \quad (\text{p-a.s}).$$

注意到$[0,\frac{k}{2^n})\in\mathscr{F}_n$，故

$$f(\frac{k}{2^n})-f(0)=\int_0^{\frac{k}{2^n}}S_n\mathrm{d}P=\int_0^{\frac{k}{2^n}}S_\infty\mathrm{d}P.$$

对$\forall\ x\in\Omega$，$\exists$ 整数列$k_n,n\geqslant1$，使得$\frac{k_n}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}x$. 因$S_\infty\in L_1$，故

$$f(x)-f(0)=\int_0^x S_\infty\mathrm{d}P=\int_0^x S_\infty(y)\mathrm{d}y.$$

于是，$g=S_\infty(y),y\in[0,1)$就是所要求的函数.

§5 上鞅的 Doob 分解

考虑定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机列$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$. 如果它是一个右闭上鞅，则存在变量$\eta\in L_1$，使得

$$\zeta_n\geqslant E(\eta|\mathscr{F}_n)\quad(n\in T_\infty).$$

令$\bar{\zeta}_n=\zeta_n-E(\eta|\mathscr{F}_n)$. $\{\bar{\zeta}_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathscr{F}_\infty\}$为一个非负上鞅. 于是，右闭上鞅可以分解成一个鞅与非负上鞅之和. 现在，讨论一般上鞅的分解，并研究一类特别上鞅，即所谓势的分解问题.

定理4.5.1（Riesz 分解） 若$\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\in T_\infty\}$为上鞅，且$\sup\limits_k E\zeta_k^-<\infty$，则此上鞅可唯一地分解为

$$\zeta_n=\mu_n+\xi_n\quad(n\in T_\infty),$$

其中，$\mu.$为鞅；$\xi.$为非负上鞅，且$E\xi_k\to0$，当$k\to\infty$时.

证 注意，由上鞅性，知

$$\gamma_{k,n}=E(\zeta_{k+n}|\mathscr{F}_k)\leqslant E(\zeta_{k+n-1}|\mathscr{F}_k)=\gamma_{k,n-1}\quad(\text{p-a.s}).$$

由此可见，对任意固定的$k\in T_\infty$，$\{\gamma_{k,n},n\in T_\infty\}$为一个单调不增的随机序列. 从而，有下列的极限存在：

$$\mu_k=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\gamma_{k,n}\quad(\forall\ k\in T_\infty).$$

下面证明：$\mu.$为鞅.

事实上，显然μ_k是$\mathscr{F}_k$-可测的. 注意：

$$-\infty<-\sup_k E\zeta_k^-\leqslant\lim_{n\to\infty}E\zeta_{k+n}\leqslant E\zeta_0<\infty.$$

于是，由单调收敛定理，得

$$E\mu_k=E(\lim_{n\to\infty}E(\zeta_{k+n}|\mathscr{F}_k))=\lim_{n\to\infty}E\zeta_{k+n}.$$

从而，$-\infty<E\eta_k\leqslant E\zeta_0<\infty$，即 $\mu_k\in L_1$ $(\forall\, k\in T_\infty)$. 此外

$$\begin{aligned}\mu_k&=\lim_{n\to\infty}E(\zeta_{k+n}|\mathscr{F}_k)=\lim_{n\to\infty}E[E(\zeta_{k+n}|\mathscr{F}_{k+1})|\mathscr{F}_k]\\&=\lim_{n'\to\infty}E[E(\zeta_{k+1+n'}|\mathscr{F}_{k+1})|\mathscr{F}_k]\\&=E[\lim_{n\to\infty}E(\zeta_{k+1+n}|\mathscr{F}_{k+1})|\mathscr{F}_k]\quad（由单调收敛定理）\\&=E(\mu_{k+1}|\mathscr{F}_k)\quad(\forall\, k\in T_\infty),\end{aligned}$$

故 $\mu_\cdot$ 为鞅.

现在令 $\xi_n=\zeta_n-\mu_n$ $(n\in T_\infty)$，则 $\xi_\cdot$ 为非负上鞅.

事实上

$$\begin{aligned}\xi_n&=\zeta_n-\mu_n=\zeta_n-\lim_{i\to\infty}E(\zeta_{n+i}|\mathscr{F}_n)\\&=\lim_{i\to\infty}\zeta_n-E(\zeta_{n+i}|\mathscr{F}_n)\geqslant 0\quad(n\in T_\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_n&\geqslant E(\zeta_{n+1}|\mathscr{F}_n)-\mu_n=E(\zeta_{n+1}|\mathscr{F}_n)-E(\mu_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)\quad(n\in T_\infty).\end{aligned}$$

可见，$\xi_\cdot$ 确实为非负上鞅.

往下验证：当 $n\to\infty$ 时，$E\xi_n\to 0$.

$$\begin{aligned}E\xi_n&=E\zeta_n-E\mu_n=E\zeta_n-E(\lim_{i\to\infty}E(\zeta_{n+i}|\mathscr{F}_n))\\&=E\zeta_n-\lim_{k\to\infty}E\zeta_k\quad（利用单调收敛定理），\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}E\xi_n=0.$$

最后证明唯一性.

假定有两个同格式的分解：

$$\mu_n^{(1)}+\xi_n^{(1)}=\zeta_n=\mu_n^{(2)}+\xi_n^{(2)}\quad(n\in T_\infty),$$

则

$$\bar{\mu}_n=\mu_n^{(1)}-\mu_n^{(2)}=\xi_n^{(2)}-\xi_n^{(1)}=\bar{\xi}_n\quad(n\in T_\infty).$$

注意：$\bar{\mu}_\cdot$ 为鞅，当 $n\to\infty$ 时，$E|\bar{\xi}_n|\leqslant E\xi_n^{(2)}+E\xi_n^{(1)}\to 0$. 即当 $n\to\infty$ 时，$E|\bar{\mu}_n|\to 0$. 又 $|\bar{\mu}_\cdot|$ 为非负下鞅. 于是

$$当\ m\to\infty 时，E|\bar{\mu}_n|\leqslant E|\bar{\mu}_{n+m}|\to 0.$$

即 $E|\bar{\mu}_n|=0$ $(n\in T_\infty)$. 从而 $\bar{\mu}_n=0$(a.c). 这就证明了分解的唯

一性. #

定义4.5.1 若非负上鞅$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$满足条件：

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时}, E\zeta_n\to 0,$$

则称此非负上鞅为势.

定理4.5.2（Doob 分解） 设$\xi_.$为势，则存在唯一随机序列α_n，$n\in T_\infty$，具有下列性质：

(i)$\alpha_0=0$;

(ii)α_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的 $(n\geqslant 1)$;

(iii)$\alpha_n,n\in T_\infty$，为一致可积的非降随机列，使得

$$\xi_n=E(\alpha_\infty|\mathscr{F}_n)-\alpha_n,n\in T_\infty. \tag{4.5.1}$$

证 让 $\Delta\xi_n=\xi_n-\xi_{n-1},\alpha_n=-\sum_{i=1}^{n}E(\Delta\xi_i|\mathscr{F}_{i-1}),n\geqslant 1;\alpha_0=0$. 从$\xi_.$的上鞅性中可以推知：$\alpha_n,n\in T_\infty$，是单调非降的. 注意：$E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1})=-\sum_{i=1}^{n}E(\Delta\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})=\alpha_n\quad(\forall\ n\geqslant 1)$. 于是，$\alpha_n$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的. 令 $\alpha_\infty=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\alpha_n$，则由 Fatou 引理可知

$$E\alpha_\infty\leqslant\lim_{n\to\infty}E\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left[-E\left(\sum_{i=1}^{n}E(\Delta\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}(E\xi_0-E\xi_n)=E\xi_0,$$

即$\alpha_\infty\in L_1$. 从而$\alpha_.$一致可积.

现在，令 $\mu_n=\xi_n+\alpha_n(n\in T_\infty)$. 如果能证明：$\mu_.$为右闭鞅，且$(\alpha_\infty,\mathscr{F}_\infty)$为其右闭元，则由 Doob-Léoy 定理立即可得出(4.5.1)式.

显然，μ_n 是 $\mathscr{F}_n$-可测的，且 $\mu_n\in L_1\quad(n\in T_\infty)$. 又

$$E(\mu_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(\xi_{n+1}-\sum_{i=1}^{n+1}E(\Delta\xi_i|\mathscr{F}_{i-1})|\mathscr{F}_n)$$
$$=E(\mu_n+\Delta\xi_{n+1}-E(\Delta\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_n)$$
$$=\mu_n\quad(n\geqslant 1),$$

故$\mu_.$为鞅. 因$\alpha_.$一致可积，因此，$\mu_.$的一致可积性等价于$\xi_.$的一致

可积性. 然而

$$\text{当 } n,m\to\infty \text{ 时}, E|\xi_n-\xi_m|\leqslant E\xi_n+E\xi_m\to 0.$$

因此, $\xi.$ 一致可积. 故按推论4.4.2, $\mu.$ 为右闭鞅. 按推论4.4.1, 有 a. c-$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_\infty\in L_1$. 注意: 势是非负的, 从而可引用 Fatou 引理得到: $0\leqslant E\xi_\infty\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}E\xi_n=0$. 于是: $\xi_\infty=0$, (a. c). 由此即得: a. c-$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\alpha_\infty$, 故 $(\alpha_\infty,\mathscr{F}_\infty)$ 为 $\mu.$ 的右闭元, 即

$$\mu_n=E(\alpha_\infty|\mathscr{F}_n)\quad(n\in T_\infty).$$

最后证明唯一性.

假定有两个随机列 $\alpha'.$ 和 $\alpha''.$ 满足定理中的要求, 使得

$$E(\alpha'_\infty|\mathscr{F}_n)-\alpha'_n=\xi_n=E(\alpha''_\infty|\mathscr{F}_n)-\alpha''_n\quad(\forall\ n\in T_\infty),$$

则

$$\alpha''_n-\alpha'_n=E(\alpha'_\infty-\alpha''_\infty|\mathscr{F}_n)=\nu_n\quad(n\in T_\infty).$$

注意: $\alpha''_n-\alpha'_n$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的. 于是

$$\nu_{n-1}=E(\alpha''_n-\alpha'_n|\mathscr{F}_{n-1})=\alpha''_n-\alpha'_n=\nu_n\quad(n\geqslant1).$$

由此知: 对 $\forall\ n,m\in T_\infty$, 有 $\nu_n=\nu_{n+m}$. 因 $\nu.$ 为右闭鞅. 从而, 按 Levy 定理, a. c-$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\alpha'_\infty-\alpha''_\infty$. 故对 $\forall\ n\in T_\infty$. $\alpha''_n-\alpha'_n=\alpha'_\infty-\alpha''_\infty$. 然而, $\alpha''_0-\alpha'_0=0$. 所以 $\alpha'_\infty-\alpha''_\infty=0$. 这表明 $\alpha''_n=\alpha'_n\quad(n\in T_\infty)$.

定义4.5.2 设 $\{\alpha_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为随机列, $\alpha_0=0$, $\alpha_n\uparrow\alpha_\infty$ (a. c), 当 $n\uparrow\infty$ 时, $\alpha_\infty\in L_1$, 则称它为随机可积增序列. 若 α_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的 $(n\geqslant1)$, 则称它为可料随机列. 若随机列 $\alpha.$ 既具有可积增性质又具有可料性, 则称它为可料随机可积增序列.

不难看出, 在势的 Doob 分解中, 势的研究被转化为寻求可料可积增序列的问题. 因此, 如何判断一个随机列的可料性就是一个首先要考虑的问题.

定理4.5.3 可积增序列 $\{\alpha_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为可料的充要条件是: 对任意 (a. c) 有界鞅 $\eta.$, 有

$$E\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\Big]=E(\eta_\infty\cdot\alpha_\infty),\tag{4.5.2}$$

其中, $\eta_\infty=$ a. c-$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n$, $\alpha_\infty=$ a. c-$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

证 由 $\eta.$ 有界从而右闭及 $\alpha.$ 一致可积，可知：$\{\eta_n \cdot \alpha_{n+1}, n \in T_\infty\}$ 一致可积，且 $\eta_n \cdot \alpha_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{a.c} \eta_\infty \cdot \alpha_\infty$. 利用 Lebesque 控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty} E(\eta_n \cdot \alpha_{n+1}) = E(\eta_\infty \cdot \alpha_\infty).$$

注意，$\alpha.$ 单调不减. 那么再一次利用 Lebesque 控制收敛定理，即可推出

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \cdot (\alpha_{n+1} - \alpha_n)\right] &= \lim_{m\to\infty} E\left[\sum_{n=0}^{m} \eta_n \cdot (\alpha_{n+1} - \alpha_n)\right] \\ &= \lim_{m\to\infty}\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha_{n+1} \cdot (\eta_n - \eta_{n+1})\right) + E\eta_m \cdot \alpha_{m+1}\right] \\ &= I + E(\eta_\infty \cdot \alpha_\infty), \end{aligned}$$

其中 $I = \lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha_{n+1} \cdot (\eta_n - \eta_{n+1})\right)$. 于是(4.5.2)式等价于

$$I = 0. \tag{4.5.3}$$

由 η 的鞅性质，有

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1} E(\alpha_{n+1} | \mathscr{F}_n) \cdot (\eta_n - \eta_{n+1})\right) = 0 \quad (\forall\, m \in T_\infty).$$

因而，$I = \lim_{m\to\infty} E\left[\sum_{n=0}^{m-1} (\alpha_{n+1} - E(\alpha_{n+1} | \mathscr{F}_n)) \cdot (\eta_n - \eta_{n+1})\right].$

$$\tag{4.5.4}$$

从(4.5.4)式中可推知：若 $\alpha.$ 是可料的，则 $E(\alpha_{n+1} | \mathscr{F}_n) = \alpha_{n+1}$. 从而，$I=0$. 反之，让 $I=0$，我们来证明：$\alpha.$ 是可料的.

设 n 为任意固定的正整数，η 为任意 $\mathscr{F}_n$-可测的有界 r.v. 令

$$\eta_k = \begin{cases} \eta - E(\eta | \mathscr{F}_{n-1}), & \text{若 } k \geqslant n, \\ 0, & \text{若 } k < n, \end{cases}$$

则 $\{\eta_k, \mathscr{F}_k, k \in T_\infty\}$ 为有界鞅(参看例4.1.2)，且

$$\eta_{k+1} - \eta_k = \begin{cases} \eta - E(\eta | \mathscr{F}_{n-1}), & \text{若 } k = n-1; \\ 0, & \text{若 } k \neq n-1; \end{cases}$$

于是，因 $I=0$ 对任意有界鞅 $\eta.$ 成立. 所以将上面定义的 $\eta.$ 代人

(4.5.4)式中，可得

$$E[(\alpha_n-E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1})\cdot(\eta-E(\eta|\mathscr{F}_{n-1}))]=0,$$

从而，$E[\eta\cdot(\alpha_n-E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1}))]=0$.

若 $\eta=\mathrm{sign}(\alpha_n-E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1}))$，则这个 η 是 $\mathscr{F}_n$-可测的. 因此，$E|\alpha_n-E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1})|=0$，故

$$\alpha_n=E(\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1})\quad(\text{a.c})\quad(n\geqslant 1).$$

此式表明：α_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的.

推论4.5.1 可积增序列 $\{\alpha_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为可料的充要条件是

$$E(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n(\alpha_{n+1}-\alpha_n))=E(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)),\qquad(4.5.5)$$

其中，$\eta_\cdot$ 为任意有界鞅.

证 令 $J=E(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{n+1}\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n))$，则按定理4.5.3，这个命题等价于证明：$J=E(\eta_\infty\cdot\alpha_\infty)$. 事实上 (4.5.6)

$$\begin{aligned}J&=\lim_{m\to\infty}E(\sum_{n=0}^{m}\eta_{n+1}\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n))\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}[E(\eta_{n+1}\cdot\alpha_{n+1})-E(\eta_{n+1}\cdot\alpha_n)]\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}[E(\eta_{n+1}\cdot\alpha_{n+1})-E(\eta_n\cdot\alpha_n)]\\&=\lim_{m\to\infty}E(\eta_{m+1}\cdot\alpha_{m+1})=E(\eta_\infty\cdot\alpha_\infty).\end{aligned}$$

定义4.5.3 如果 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为势，且 $\{\alpha_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为 Doob 分解式中的可料可积增序列，则称 $\alpha_\cdot$ 和 $\xi_\cdot$ 为相联的随机列.

在 Riesz 分解中，如果上鞅 $\zeta_n,n\in T_\infty$，一致可积，则分解出的鞅 $\mu_n,n\in T_\infty$，必为右闭鞅，而分解出的势可利用 Doob 分解再分解. 这样，对于任意一致可积上鞅 $\zeta_\cdot$ 必有如下分解

$$\zeta_n=\eta_n-\alpha_n,n\in T_\infty,\qquad(4.5.7)$$

其中，$\eta_\cdot$ 为右闭鞅，而 $\alpha_\cdot$ 为一可料随机可积增序列. 这种分解的一

个最重要的应用是研究平方可积鞅的性质.

例4.5.1 设$\{\mu_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为鞅,且$\sup\limits_n E|\mu_n|^2<\infty$. 利用定理4.3.2($p=2$),可得

$$E(\sup_n|\mu_n|^2)\leqslant 4\sup_n E|\mu_n|^2.$$

由此可知:

(i)此鞅一致可积.从而,右闭;

(ii)$\mu^2_\cdot$一致可积,从而,为非负右闭下鞅.

于是,按(4.5.7)式,有如下分解式:

$$-\mu_n^2=-\eta_n-\alpha_n,n\in T_\infty, \tag{4.5.8}$$

其中,$-\eta_\cdot$为右闭鞅;$\alpha_\cdot$为可料随机可积增序列.也可改写为

$$\eta_n=\mu_n^2-\alpha_n.$$

例4.5.2 让$\mu_\cdot$同上例所设,$\xi_\cdot$为任意有界随机列,令$I_0=0$;$I_n=\sum\limits_{k=1}^n\xi_{k-1}\cdot(\mu_k-\mu_{k-1}),n\geqslant 1$. 显然$I_\cdot$为鞅,且$I_n^2,n\in T_\infty$,为右闭下鞅.现在来求与$I_\cdot$相联的随机列$\beta_\cdot$.按上例的作法,有 $\nu_n=I_n^2-\beta_n,n\in T_\infty$. 这里$\nu_\cdot$为鞅.

$$\begin{aligned}I_n^2-\beta_n&=\nu_n=E(\nu_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(I_{n+1}^2-\beta_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=I_n^2-\beta_{n+1}+E(\xi_n^2\cdot(\mu_{n+1}-\mu_n)^2|\mathscr{F}_n)\\&=I_n^2-\beta_{n+1}+\xi_n^2\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n),\end{aligned}$$

故
$$\beta_{n+1}=\beta_n+\xi_n^2\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n),$$

即
$$\beta_n=\sum_{k=1}^n\xi_{k-1}^2\cdot(\alpha_k-\alpha_{k-1}),n\geqslant 1;\beta_0=0.$$

其中$\alpha_\cdot$为例4.5.1中与$\mu_\cdot$相联的随机列.

定义4.5.4 称分解式(4.5.8)中的可料增随机列α为平方可积鞅μ的特征.并记为$\alpha\triangleq\langle\mu,\mu\rangle$.

引理4.5.1 设μ为平方可积鞅.$\langle\mu,\mu\rangle$为其特征,则

$$\Delta\langle\mu,\mu\rangle_n=E((\Delta\mu_n)^2|\mathscr{F}_{n-1})=E(\Delta\mu_n^2|\mathscr{F}_{n-1})\quad(\text{p-a.s}).$$

$$\langle\mu,\mu\rangle_n=\sum_{k=1}^nE((\Delta\mu_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})\quad(\text{p-a.s})(n\geqslant 1).$$

证 由(4.5.8)式知：$0=E(\Delta\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})=E(\Delta\mu_n^2-\Delta\alpha_n|\mathscr{F}_{n-1})$. 于是

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_n&=E(\Delta\mu_n^2|\mathscr{F}_{n-1})\\&=E((\Delta\mu_n)^2+2\mu_{n-1}\cdot(\mu_n-\mu_{n-1})|\mathscr{F}_{n-1})\\&=E((\Delta\mu_n)^2|\mathscr{F}_{n-1})\quad(\text{p-a.s}).\end{aligned}$$

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}E((\Delta\mu_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})\quad(\text{p-a.s}).$$

§6 局部半鞅

前几节介绍的半鞅，均在L_1中考虑. 按条件期望理论，变量关于某个子σ-代数的条件期望的存在不必要求它是可积的. 基于这一点，似有必要推广前面讨论的半鞅，本节将只给出广义半鞅和局部半鞅的概念及它们之间的基本关系.

定义4.6.1 若随机列$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$满足下列要求：

(i)对每个$n\in T_\infty$，$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ (a.s)有定义，即

$$E(\xi_{n+1}^+|\mathscr{F}_n)\wedge E(\xi_{n+1}^-|\mathscr{F}_n)<\infty\quad(\text{p-a.s});$$

(ii)定义4.1.1中的半鞅关系成立；

则称ξ为广义半鞅.

引理4.6.1 若定义4.6.1中的ξ为广义鞅，则

$$E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)<\infty\quad(\text{p-a.s}).$$

若ξ为广义下鞅，则

$$E(\xi_{n+1}^-|\mathscr{F}_n)<\infty\quad(\text{p-a.s}).$$

若ξ为广义上鞅，则

$$E(\xi_{n+1}^+|\mathscr{F}_n)<\infty\quad(\text{p-a.s}).$$

证 对于广义鞅ξ，有

$$\xi_n=E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(\xi_{n+1}^+|\mathscr{F}_n)-E(\xi_{n+1}^-|\mathscr{F}_n),$$

而ξ_n为r.v.因此，上式右边的差值(a.s)有限. 从而$E(\xi_{n+1}^\pm|\mathscr{F}_n)<\infty$ (p-a.s). 由此得引理的第一个结论.

对于广义下鞅 ξ，有

$$\xi_n \leqslant E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(\xi_{n+1}^+|\mathscr{F}_n)-E(\xi_{n+1}^-|\mathscr{F}_n).$$

因 ξ_n 为 r. v. 而有 $\xi_n > -\infty$ (p-a. s). 故上式表明：

$$E(\xi_{n+1}^-|\mathscr{F}_n)<\infty \quad \text{(p-a. s)}.$$

关于广义上鞅，也可作类似的讨论.

定义4.6.2 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为一随机列. 若存在一个 $\mathscr{F}_.$-时列 $\tau_k,k\geqslant 1$，满足下列条件：

(i) $\tau_k \uparrow \infty$ (p-a. s)；

(ii) $\xi^{\tau_k}=\{\xi_{n\wedge\tau_k}\cdot\chi_{(\tau_k>0)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为半鞅；

则称 ξ 为局部半鞅.

按此定义，半鞅必为局部半鞅. 事实上，若选取 $\tau_k=k$ (p-a. s)，则 $\{\tau_k,k\geqslant 1\}$ 满足定义4.6.2中的条件(i)和(ii).

定义4.6.3 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为一随机列，$V=\{V_n,\mathscr{F}_{n-1},n\in T_\infty\}$ 为一可料随机列($\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$). 定义随机列 $V\cdot\xi$ 如下：

$$(V\cdot\xi_n)=V_0\cdot\xi_0+\sum_{i=1}^{n}V_i\cdot\Delta\xi_i，\text{其中 } n\in T_\infty,\Delta\xi_i=\xi_i-\xi_{i-1};$$

则称 $V\cdot\xi$ 为 ξ 的 V-变换.

定理4.6.1 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为一随机列，且 $\xi_0=0$ (p-a. s)，则下列条件是等价的：

(i) ξ 为一局部鞅；

(ii) ξ 为一广义鞅；

(iii) ξ 为某个鞅的 V-变换，即存在一个鞅 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$，$Y_0=0$ 及一个可料随机列 $V=\{V_n,\mathscr{F}_{n-1},n\in T_\infty\}$，$V_0=0$ ($\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$)，使得 $\xi=V\cdot Y$.

证 (i)⇒(ii)，即 ξ 为局部鞅⇒ξ 为广义鞅.

注意：ξ 为广义鞅⇔1° $E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)<\infty$，(p-a. s)；

$$2°\ \xi_n=E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n) \quad \text{(p-a. s)}.$$

按局部鞅的定义；存在 $\mathscr{F}_.$-时列 $\tau_k\uparrow\infty$ (p-a. s)，使得

$$\xi^{\tau_k}=\{\xi_{n\wedge\tau_k},\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}\text{为鞅},(\forall\ k\geqslant 1).$$

于是，对$\forall\ n\in T_\infty, k\geqslant 1$，有 $E(|\xi_{n\wedge\tau_k}|\cdot\chi_{(\tau_k>0)})<\infty$

$\Rightarrow E(|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}|\cdot\chi_{(\tau_k>n)})=E(|\xi_{n+1}|\cdot\chi_{(\tau_k>n)})<\infty$

$\Rightarrow \infty \overset{(a.s)}{>} E(|\xi_{n+1}|\cdot\chi_{(\tau_k>n)}|\mathscr{F}_n)=\chi_{(\tau_k>n)}\cdot E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)$ $(\forall\ k\geqslant 1)$.

注意：$(\tau_k>n)\uparrow\Omega$ 当 $k\uparrow\infty$时 (p-a.s)，故 $E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)<\infty$. (p-a.s). 这就是条件(i). 下证条件(ii)成立.

条件(ii)$\Leftarrow\int_A\xi_{n+1}\mathrm{d}P=\int_A\xi_n\mathrm{d}P$，其中 $A\in\mathscr{F}_n$，且

$$\int_A|\xi_{n+1}|\mathrm{d}P<\infty. \tag{4.6.1}$$

事实上，由 Radon-Nikodym 定理知：

$E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)(a.s)<\infty\Leftrightarrow$ 测度 $Q(A)=\int_A|\xi_{n+1}|\mathrm{d}P$ $(A\in\mathscr{F}_n)$，是 σ- 有限的. 让 $A_k^{(n)}=\{\omega: E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)\leqslant k\}$ $(k\geqslant 1)$，则 $A_k^{(n)}\uparrow\Omega$，(p-a.s)，当 $k\uparrow\infty$ 时，且 $A_k^{(n)}\in\mathscr{F}_n$ $(\forall\ k\geqslant 1)$，

$$\begin{aligned}Q(A_k^{(n)})&=\int_{A_k^{(n)}}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\mathrm{d}P\\&=\int_{A_k^{(n)}}E(|\xi_{n+1}||\mathscr{F}_n)\mathrm{d}P\leqslant k<\infty\quad(k\geqslant 1).\end{aligned}$$

如果对$\forall\ k\geqslant 1$，有

$$\int_A\chi_{A_k^{(n)}}\cdot\xi_{n+1}\mathrm{d}P=\int_A\chi_{A_k^{(n)}}\cdot\xi_n\mathrm{d}P\quad(\forall\ A\in\mathscr{F}_n), \tag{4.6.2}$$

则 $$\chi_{A_k^{(n)}}\cdot\xi_n=\chi_{A_k^{(n)}}\cdot E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)\quad\text{(p-a.s)}.$$

让 $k\uparrow\infty$，则上式表明：$\xi_n=E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ (p-a.s). 从而，(2°)成立. 然而(4.6.2)式$\Leftrightarrow\int_A\xi_{n+1}\mathrm{d}P=\int_A\xi_n\mathrm{d}P$，$(\forall\ A\in\mathscr{F}_n, Q(A)<\infty)$(即(4.6.1)式).

下面证明关系式(4.6.1).

注意：$|\xi^{\tau_k}|=\{\xi_{n\wedge\tau_k}|\cdot\chi_{(\tau_k>0)},\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为下鞅. 于是，对于$\forall\ A\in\mathscr{F}_n, Q(A)<\infty$，有

$$\int_{A\cap(\tau_k>n)}|\xi_n|\mathrm{d}P=\int_{A\cap(\tau_k>n)}|\xi_{n\wedge\tau_k}|\cdot\chi_{(\tau_k>0)}\mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_{A\cap(\tau_k>n)} E(|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}| \cdot \chi_{(\tau_k>0)} | \mathscr{F}_n) \mathrm{d}P$$

$$= \int_{A\cap(\tau_k>n)} |\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}| \cdot \chi_{(\tau_k>0)} \mathrm{d}P$$

$$= \int_{A\cap(\tau_k>n)} |\xi_{n+1}| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_A |\xi_{n+1}| \mathrm{d}P = Q(A) < \infty.$$

令 $\eta_k = |\xi_n| \cdot \chi_{(\tau_k>n)} \cdot \chi_A$，则 $\eta_k \xrightarrow[k\to\infty]{(\mathrm{a.s})} |\xi_n| \cdot \chi_A$. 由单调收敛定理知：$\int_A |\xi_n| \mathrm{d}P \leqslant \int_A |\xi_{n+1}| \mathrm{d}P$. 于是，当 $A \in \mathscr{F}_n, Q(A) < \infty$ 时：$|\xi_n| \cdot \chi_A \in L_1$, $|\xi_{n+1}| \cdot \chi_A \in L_1$.

令 $\mu_k' = \xi_n \cdot \chi_{(\tau_k>n)} \cdot \chi_A$, $\mu_k'' = \xi_{n+1} \cdot \chi_{(\tau_k>n)} \cdot \chi_A$，则 μ', μ'' 在 L_1 中一致可积，且(a. s)收敛. 于是，由 Lebesque 收敛定理，有

$$\int_A \xi_n \mathrm{d}P = \lim_{k\to\infty} \int_A \xi_n \cdot \chi_{(\tau_k>n)} \mathrm{d}P = \lim_{k\to\infty} \int_A \xi_{n+1} \cdot \chi_{(\tau_k>n)} \mathrm{d}P$$

$$= \int_A \xi_{n+1} \mathrm{d}P.$$

(ii)⇒(iii). 即 ξ 为广义鞅⇒ξ 为某鞅 Y 的 V-变换.

设 $\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}$. ξ 为广义鞅表明：$E(|\Delta\xi_n| | \mathscr{F}_{n-1})$ 为 r. v. 令

$$V_0 = 0; V_n = \begin{cases} E(|\Delta\xi_n| | \mathscr{F}_{n-1}), & \text{若 } E(|\Delta\xi_n| | \mathscr{F}_{n-1}) \neq 0, \\ 1, & \text{否则}. \end{cases} \quad (n \geqslant 1);$$

$W_0 = 0$; $\quad W_n = V_n^{-1}, (n \geqslant 1); Y_0 = 0; Y_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \Delta\xi_i \quad (n \geqslant 1)$.

则

1° $(V \cdot Y)_n = V_0 \cdot Y_0 + \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \Delta Y_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot W_i \cdot \Delta\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\xi_i = \xi_n$，故 $\xi = (V \cdot Y)$.

2° 显然：$V = \{V_n, \mathscr{F}_{n-1}, n \in T_\infty\}$ 为可料随机列，

$W = \{W_n, \mathscr{F}_{n-1}, n \in T_\infty\}$ 为可料随机列.

3° $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in T_\infty\}$ 为鞅. 事实上

$$E|Y_n|=E\left|\sum_{i=1}^{n}W_i\cdot\Delta\xi_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}E(W_i\cdot|\Delta\xi_i|)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(W_i\cdot E(|\Delta\xi_i||\mathscr{F}_{i-1}))\leqslant n<\infty.$$

$$E(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=Y_n+E(W_{n+1}\cdot\Delta\xi_{n+1})$$

$$=Y_n+E(W_{n+1}\cdot E(\Delta\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n))$$

$$=Y_n\quad(\text{p-a.s}),$$

故 $\xi=V\cdot Y$ 为鞅 Y 的 V-变换.

(iii)⇒(i),即 ξ 为某鞅 Y 的 V-变换⇒ξ 为局部鞅.

设 $\xi=V\cdot Y$. 构作如下停时列 $\tau_k,k\geqslant1$:

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant0:|V_{n+1}|>k\};\tau_k=\infty,\text{若}\{\cdots\}=\varnothing.$$

则 $\tau_k,k\geqslant1$,具有下列性质:

1° τ_k 为 $\mathscr{F}$.-时. 这是因为 V 是可料的;

2° $\tau_k\uparrow\infty$(p-a.s),这是因为每个 V_n 为 r.v.;

3° $|V_{n\wedge\tau_k}|\leqslant k$ (p-a.s),按 τ_k 的定义可知;

4° $\xi^{\tau_k}=\{(V\cdot Y)_{n\wedge\tau_k}\cdot\chi_{(\tau_k>0)},\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 为鞅 ($\forall\ k\geqslant1$).

事实上,

$$E|\xi_n^{\tau_k}|\leqslant E\left(\sum_{i=1}^{n\wedge\tau_k}V_i|\Delta Y_i|\right)\leqslant k\sum_{i=1}^{n}E|\Delta Y_i|<\infty;$$

$$E(\Delta\xi_{n+1}^{\tau_k}|\mathscr{F}_n)=E([(VY)_{n+1}-(VY)_n]\chi_{(\tau_k>n)}|\mathscr{F}_n)$$

$$=\chi_{(\tau_k>n)}\cdot E(V_{n+1}\cdot\Delta Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$

$$=\chi_{(\tau_k>n)}\cdot V_{n+1}\cdot E(\Delta Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=0.$$

综上分析,$\xi=V\cdot Y$ 为局部鞅.

例4.6.1 对弈策略问题.

设 $\eta_k,k\geqslant1$,为独立同分布的 Bernoulli r.v. 列,且 $P(\eta_1=1)=p,P(\eta_1=-1)=1-p=q$,且 $p\cdot q\neq0$. 让 $\{\eta_n=1\}$ 和 $\{\eta_n=-1\}$ 分别表示在甲、乙对弈于第 n 轮时甲方成功和失败的事件. V_n 表示甲方在第 n 轮对弈中所下的赌注,ξ_n 表示甲在第 n 轮对弈之后总的输出量,则 $\xi_0=0;\xi_n=\xi_{n-1}+V_n\cdot\eta_n(n\geqslant1)$. 假定 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\};\mathscr{F}_n$

$=\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ $(n\geqslant 1)$. 则甲在第 n 轮对弈中下的赌注 V_n 应根据 n 时刻之前的胜负情形来决策. 因此,V_n 应是取值于 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的 r. v. 这个解释表明:可料随机列 $V=\{V_n,\mathscr{F}_{n-1},n\in T_\infty\}$ 描述甲方在对弈中的某种"对策"或"策略".

现设 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i \quad (n\geqslant 1)$;$Y_0=0$,则

$$\xi_n=\sum_{i=1}^{n}V_i\cdot\Delta Y_i \quad (n\geqslant 1),\xi_0=0.$$

这个格式表明:甲方的输出 ξ 是独立同分布变量之和 Y 的 V-变换.

下面,根据 η_1的不同分布讨论三种情形:

(i) $p=\frac{1}{2}=q$. 这时 Y 为鞅,而 ξ 为广义鞅. 这描述一种公平对弈模式;

(ii) $p>q$:注意,$E(\Delta Y_n|\mathscr{F}_{n-1})=E(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})=E\eta_n=p-q>0$, (p-a. s). 因此,$Y$ 为下鞅. 而 $E(\Delta\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})=V_n\cdot E(\Delta Y_n|\mathscr{F}_{n-1})=(p-q)\cdot V_n>0$ (p-a. s). 因此,ξ 为广义下鞅. 不难证明,ξ 也是局部下鞅这描述一种对甲方有利的对弈模式;

(iii) $p<q$:将(ii)的所有不等号反号,即知 Y 为上鞅,ξ 为广义上鞅,也是局部上鞅. 这描述一种对甲方不利的对弈模式.

现在,考虑在对弈格局中,博弈者采取何种"策略"问题. 为此,考虑一个具体的"策略",例如,如果甲方在首 $n-1$轮次对弈中一直失败,那么他在第 n 轮对弈时将赌注加倍,一旦成功就退出博弈. 这个"策略"的数学表示如下:

$$V_0=0;V_1=1;V_n=\begin{cases}2^{n-1}, & \text{若 } \eta_i=-1,1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 0, & \text{否则}\end{cases} (n\geqslant 2).$$

如果甲方按此"策略"行动,则他的输出量 ξ_n 具有如下特点:

若 $\eta_i=-1,1\leqslant i\leqslant n$,则 $\xi_n=-\sum_{i=1}^{n}V_i=-(2^n-1)$;

若 $\eta_i=-1,1\leqslant i\leqslant n,\eta_{n+1}=1$,则 $\xi_{n+1}=\xi_n+V_{n+1}=1$.

这表明，甲方在此"策略"下，其对弈结果以赢"1"告终.

下面讨论在上述"策略"下对弈终止时刻 τ.

定义：$\tau=\inf\{n\geqslant 1:\xi_n=1\}$；$\tau=\infty$，若$\{\cdots\}=\varnothing$.

显然，$\xi_\tau=1$；$\xi_k<1$，当 $k<\tau$ 时. 这个事实表明：τ 为甲方终止对弈的时刻. τ 具有下列性质：

(i)τ 为有限停时. 事实上

$P(\tau=n)=P\{\xi_i<1,1\leqslant i\leqslant n-1;\xi_n=1\}=P\{\eta_i=-1,$
$1\leqslant i\leqslant n-1;\eta_n=1\}=q^{n-1}\cdot p.$

$$P(\tau<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau=n)=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}\cdot p=1.$$

记 $\tau=\tau_q$，则 $P(\tau_q=n)=q^{n-1}\cdot p=q^{n-1}-q^n$. 显然，$q=1-\frac{1}{n}$是其极大值点. 因此，当 $q=\frac{1}{2}$时，$P(\tau_{\frac{1}{2}}=n)=(\frac{1}{2})^n$；当 $q<\frac{1}{2}$时，$P(\tau_q=n)<(\frac{1}{2})^n$；当$\frac{1}{2}<q<1-\frac{1}{n}$时$(\frac{1}{2})^n<P(\tau_q=n)$. 这表明，对弈对甲有利时其截止时间比不利时短.

(ii)$E\tau=\frac{1}{p}$. 事实上

$$E\tau=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot P(\tau=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot q^{n-1}\cdot p=\frac{1}{p}.$$

因此，当 $p\uparrow$ 时，$E\tau\downarrow$. 这表明：随着对弈对甲有利，其对弈截止时间缩短.

在经典博弈论中，当 $p=\frac{1}{2}=q$ 时，这个系统 ξ（输时赌注加倍，赢时退出博弈）就叫做一个鞅. 这就是鞅概念的由来及其实际背景.

定理4.6.2 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为随机列，$\xi_0=0$，(p-a.s)，且

$E(|\xi_n||\mathscr{F}_{n-1})$为 r.v. $(\forall\ n\geqslant 1)$，

则定理4.6.1的结论对半鞅亦成立.

证 其证明完全类似于定理4.6.1之证.

§7 半鞅的收敛集

按照推论4.4.1，条件$\sup\limits_n E|\xi_n|<\infty$可以保证：鞅或上、下鞅$\xi$(a.s)收敛到某个可积变量．定义符号：

$$\{\xi_n\to\}\triangleq\{-\infty<\lim_{n\to\infty}\xi_n<\infty\}.$$

考虑到推论4.4.1的条件不成立的下鞅ξ，其收敛集$\{\xi_n\to\}$不一定是一个零概率事件．因此，讨论收敛集$\{\xi_n\to\}$的结构与范围就是一个很有意义的问题．本节解决问题的基本思想在于反复利用推论4.4.1的结论．

定义4.7.1 设$\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为随机列；$\tau_a=\inf\{n\geqslant 1:\xi_n>a\}$；$\tau_a=\infty$，若$\{\cdots\}=\varnothing$；$\Omega_a=\{\tau_a<\infty\}$．类$C^+$定义如下：

$C^+=\{\xi:\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\},\xi_0=0$，且$E[(\Delta\xi_{\tau_a})^+\chi_{\Omega_a}]<\infty\quad(\forall\, a>0)\}$.

引理4.7.1 $E((\Delta\xi_{\tau_a})^+\cdot\chi_{\Omega_a})<\infty\Rightarrow E(\xi_{\tau_a}^+\cdot\chi_{\Omega_a})<\infty\Leftrightarrow E\xi_{\tau_a}^+<\infty$.

证 $E(\xi_{\tau_a}^+\cdot\chi_{\Omega_a})=E[(\Delta\xi_{\tau_a}+\xi_{\tau_a-1})^+\cdot\chi_{\Omega_a}]\leqslant a+E((\Delta\xi_{\tau_a})^+\cdot\chi_{\Omega_a})$.

定理4.7.1 若ξ为非负下鞅，且$\xi_0=0$，$\sup\limits_n E\xi_n<\infty$，则$\xi\in C^+$.

证 事实上，由定理4.1.1知

$$\begin{aligned}E(\xi_{\tau_a}\cdot\chi_{(\tau_a<n)})&=E(\xi_{n\wedge\tau_a}\cdot\chi_{(\tau_a<n)})\leqslant E(\chi_{(\tau_a<n)}\cdot E(\xi_n|\mathscr{F}_{n\wedge\tau_a}))\\&=E(\xi_n\cdot\chi_{(\tau_a<n)})\leqslant\sup_n E\xi_n.\end{aligned}$$

由单调收敛定理可得

$$E(\xi_{\tau_a}\cdot\chi_{\Omega_a})\leqslant\sup_n E\xi_n.$$

此外，$E((\Delta\xi_{\Omega_a})^+\cdot\chi_{\Omega_a})\leqslant E(\xi_{\tau_a}\cdot\chi_{\Omega_a})$．故$\xi\in C^+$.

引理4.7.2 设$\xi_0=0$．若$E(\sup\limits_n|\Delta\xi_n|)<\infty$或$|\Delta\xi_n|\leqslant k<\infty$

(p-a.s)，($\forall\ n\geqslant1$)，则 $\xi\in C^+$.

证 $E[(\Delta\xi_{\tau_a})^+\cdot\chi_{\Omega_a}]\leqslant E(\sup_n|\Delta\xi_n|)$或 k.

定理4.7.2 若 ξ 为下鞅，且 $\xi\in C^+$，则

$$\{\xi_n\to\}=\{\sup_n\xi_n<\infty\}\quad(\text{p-a.s}).$$

证 显然，$\{\xi_n\to\}\subseteq\{\sup_n\xi_n<\infty\}$. 下证反向包含关系.

令 $\xi^{\tau_a}=\{\xi_{n\wedge\tau_a},\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$，则按定理4.1.1，这是一个下鞅. 由引理4.7.1知：$\xi\in C^+\Rightarrow E\xi^+_{n\wedge\tau_a}\leqslant E(\xi^+_{\tau_a}\cdot\chi_{\Omega_a})+a<\infty$. 于是，$\sup_n E\xi^+_{n\wedge\tau_a}<\infty$. 采用推论4.4.1可推出：$\xi_{\tau_a}\in L_1$ ($\forall\ a>0$)，从而，对$\forall\ a>0$，有$\{\tau_a=\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}$ (p-a.s)，故

$$\bigcup_{a>0}\{\tau_a=\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}.$$

然而，$\{\sup_n\xi_n<\infty\}=\bigcup_{a>0}\{\sup_n\xi_n\leqslant a\}=\bigcup_{a>0}\{\tau_a=\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}$ (p-a.s).

推论4.7.1 设 ξ 为鞅，且 $E(\sup_n|\Delta\xi_n|)<\infty$，则

$$\{\xi_n\to\}\cup\{\underline{\lim}\,\xi_n=-\infty,\overline{\lim}\,\xi_n=\infty\}=\Omega\quad(\text{p-a.s}).$$

证 不妨设 $\xi_0=0$，则按引理4.7.3，$\pm\xi\in C^+$. 因此，由定理4.7.4，有

$$\{\overline{\lim}\,\xi_n<\infty\}=\{\sup_n\xi_n<\infty\}=\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s}),$$

$$\{\underline{\lim}\,\xi_n>-\infty\}=\{\overline{\lim}(-\xi_n)<\infty\}=\{-\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s})$$

$$\Rightarrow\{\xi_n\to\}=\{\overline{\lim}\,\xi_n<\infty\}\cup\{\underline{\lim}\,\xi_n>-\infty\}\quad(\text{p-a.s}).$$

由此即可得结论.

定理4.7.3 设 ξ 为下鞅，且其Doob分解为 $\xi_n=m_n+A_n,n\in T_\infty$.

(i)若 ξ 非负，则$\{A_\infty<\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}\subseteq\{\sup_n\xi_n<\infty\}$ (p-a.s).

(ii)若 $\xi\in C^+$，则$\{\xi_n\to\}=\{\sup_n\xi_n<\infty\}\subseteq\{A_\infty<\infty\}$ (p-a.s).

(iii)若 ξ 非负，且 $\xi\in C^+$，则$\{\xi_n\to\}=\{\sup_n\xi_n<\infty\}=\{A_\infty<$

$\infty\}$ (p-a.s).

证 显然(iii)是(i)与(ii)联合的结果，而按定理4.7.4，我们仅需证明两个关系：

(a)在(i)的条件下，$\{A_\infty<\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}$ (p-a.s)；

(b)在(ii)的条件下$\{\sup_n\xi_n<\infty\}\subseteq\{A_\infty<\infty\}$ (p-a.s).

$\Rightarrow$(a) 定义$\sigma_a=\inf\{n\geqslant1:A_{n+1}>a\}$；$\sigma_a=\infty$，若$\{\cdots\}=\varnothing$. 由$A$的可料性知：$\sigma_a$为$(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$-时. 显然：$A_{\sigma_a}\leqslant a$. 按定理4.1.4，

$$E\xi_{n\wedge\sigma_a}=Em_{n\wedge\sigma_a}+EA_{n\wedge\sigma_a}\leqslant E\xi_0+EA_{\sigma_a}\leqslant a+E\xi_0<\infty.$$

$$\Rightarrow\sup_n E\xi_{n\wedge\sigma_a}<\infty.$$

由推论4.4.1，即可得：$\xi_{\sigma_a}\in L_1$. 从而

$$\{\sigma_a=\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s}),$$

故 $\{A_\infty<\infty\}=\bigcup_{a>0}\{A_\infty\leqslant a\}=\bigcup_{a>0}\{\sigma_a=\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}$.

$\Rightarrow$(b) 利用定理4.1.1，并注意$\xi_0=0$. 及引理4.7.4可得：

$$\sup_n EA_{n\wedge\tau_a}<\infty.$$

由此及A的增性质，并采用单调收敛定理，可知：

$A_{\tau_a}\in L_1$. 从而 $\{\tau_a=\infty\}\subseteq\{A_\infty<\infty\}$ (p-a.s).

$$\Rightarrow\{\sup_n\xi_n<\infty\}=\bigcup_{a>0}\{\tau_a=\infty\}\subseteq\{A_\infty<\infty\}\quad(\text{p-a.s}).$$

推论4.7.2 设$\eta=\{\eta_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$为非负可积r.v.列. $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$. 令$\xi_0=0$；$\xi_n=\sum_{i=1}^n\eta_i\quad(n\geqslant1)$，则

$$\{\sum_{n=1}^\infty E(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s})；$$

若还有$E\sup_k\eta_k<\infty$，则

$$\{\sum_{n=1}^\infty E(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}=\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s}).$$

证 按定义：$\eta_n=\Delta\xi_n\quad(n\geqslant1)$. $\eta_n\geqslant0$表明：ξ是一个非负下鞅.

而 $$\xi_n = \sum_{k=1}^{n}(\eta_k - E(\eta_k|\mathscr{F}_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n}E(\eta_k|\mathscr{F}_{k-1}).$$

记此式右边的第一个和为 m_n，第二个和为 A_n，则 ξ 的 Doob 分解式为 $\xi_n = m_n + A_n$. 于是，由定理4.7.3(i)可以得出此推论中的第一个结论，此外，

$$E(\sup_k \eta_k) < \infty \Leftrightarrow E(\sup_k |\Delta\xi_k|) < \infty \Rightarrow \xi \in C^+,$$

故定理4.7.5(iii)表明此推论的第二个结论成立.

推论4.7.3 (Borel-Cantelli-Levy 引理) 设 $B_n \in T_n, n \geq 1$，则

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} P\{B_n|\mathscr{F}_{n-1}\} < \infty\} = \{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{B_n} < \infty\} \text{ (p-a.s)}.$$

证 $\eta_k = \chi_{B_k}, k \geq 1$，则 η 满足上述推论中的所有条件. 由此得到结论.

注 Borel-Cantelli 引理确实可以从上述推论中得出，设

$$B_n \in \mathscr{F}, n \geq 1; \mathscr{F}_n = \sigma(\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}) \quad (n \geq 1).$$

(a)若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty$，则 $P(B_n, \text{i.o.}) = 0$. 事实上

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} E(\chi_{B_n}|\mathscr{F}_{n-1})) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

因此 $$\{\sum_{n=1}^{\infty} E(\chi_{B_n}|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \Omega \quad \text{(p-a.s)}.$$

推论4.7.3表明：

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{B_n} < \infty\} = \Omega \quad \text{(p-a.s)}. \Leftrightarrow P(B_n, \text{i.o.}) = 0.$$

(b)若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$，且 $\{B_n, n \geq 1\}$ 为独立事件列，则 $P(B_n, \text{i.o.}) = 1$. 事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty \quad \text{(p-a.s)}.$$

于是，推论4.7.3表明：

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{B_n}<\infty\}=\varnothing \quad (\text{p-a.s})\Leftrightarrow P(B_n,\text{i.o.})=1.$$

这里的命题(a)、(b)构成 B.-C. 引理.

下面讨论平方可积鞅的收敛集问题.

定理4.7.4 若 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为一平方可积鞅,则

$$\{\langle\xi,\xi\rangle_\infty<\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s});$$

若还有 $E(\sup\limits_n|\Delta\xi_n|^2)<\infty$,则

$$\{\langle\xi,\xi\rangle_\infty<\infty\}=\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s}).$$

证 注意:ξ^2 和 $\eta^2=(\xi+1)^2$ 均为非负下鞅,且 $\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle$ (a.s)事实上

$$\begin{aligned}\langle\eta,\eta\rangle_n&=\sum_{k=1}^{n}E((\Delta\eta_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^{n}E((\Delta\xi_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})=\langle\xi,\xi\rangle_n(\text{p-a.s}).\end{aligned}$$

于是,利用定理4.7.3(i),有

$$\begin{aligned}\{\langle\xi,\xi\rangle_\infty<\infty\}&=\{\xi_n^2\to\},\\\{\langle\eta,\eta\rangle_\infty<\infty\}&\subseteq\{\xi_n^2\to\}\cap\{(\xi_n+1)^2\to\}\\&=\{\xi_n\to\}\quad(\text{p-a.s}).\end{aligned}$$

这就是第一个结论.下证第二结论.

按定理4.7.3(iii),如果 $(\xi-\xi_0)^2\in C^+$,则有

$$\{\langle\xi,\xi\rangle_\infty<\infty\}=\{\xi_n^2\to\},\{\langle\eta,\eta\rangle_\infty<\infty\}=\{(\xi_n+1)^2\to\}\quad(\text{p-a.s}).$$

从而,$\{\langle\xi,\xi\rangle_\infty<\infty\}=\{\xi_n\to\}$ (p-a.s).这就是所要的结论.因此,剩下的问题是验证:$(\xi-\xi_0)^2\in C^+$.不失一般性,可以假定:$\xi_0=0$.于是,按 C^+ 之定义:$\xi^2\in C^+\Leftrightarrow E((\Delta\xi_{\tau_a}^2)^+\cdot\chi_{\Omega_a})<\infty(\forall\ a>0)$.注意:$\tau_a=\inf\{n\geqslant1:\xi_n^2>a\}$;$\tau_a=\infty$,若 $\{\cdots\}=\varnothing$.则有

$$\begin{aligned}|\Delta\xi_{\tau_a}^2|\cdot\chi_{\Omega_a}&\leqslant[(\Delta\xi_{\tau_a})^2+2\cdot|\xi_{\tau_a-1}|\cdot|\Delta\xi_{\tau_a}|]\cdot\chi_{\Omega_a}\\&\leqslant[(\Delta\xi_{\tau_a})^2+\xi_{\tau_a-1}^2+(\Delta\xi_{\tau_a})^2]\cdot\chi_{\Omega_a}\\&\leqslant(a+2\cdot(\Delta\xi_{\tau_a})^2)\cdot\chi_{\Omega_a}\end{aligned}$$

$\leqslant (a+2\cdot\sup_n|\Delta\xi_n|^2)\cdot\chi_{\Omega_a}$

$\Rightarrow E(|\Delta\xi_{\tau_a}^2|\cdot\chi_{\Omega_a})\leqslant a+2\cdot E(\sup_n|\Delta\xi_n|^2)<\infty \quad (\forall\ a>0).$

定理4.7.5 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$为平方可积鞅，$A=\{A_n,\mathscr{F}_{n-1},n\in T_\infty\}(\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0)$为可料增随机列，且 $A_1>0,A_\infty=\infty$ (p-a.s).

(i)若 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E((\Delta\xi_i)^2|\mathscr{F}_{i-1})}{A_i^2}<\infty$ (p-a.s)，则 $\frac{\xi_n}{A_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (p-a.s)；

(ii)若$\langle\xi,\xi\rangle$为 ξ 的特征，且$\langle\xi,\xi\rangle_\infty=\infty$ (p-a.s)，则$\frac{\xi_n}{\langle\xi,\xi\rangle_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (p-a.s).

证 令 $m_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\xi_i}{A_i}$，则 $m=\{m_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 为平方可积鞅，且其特征为

$$\langle m,m\rangle_n=\sum_{i=1}^{n}E((\Delta m_i)^2|\mathscr{F}_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{E((\Delta\xi_i)^2|\mathscr{F}_{i-1})}{A_i^2}\quad\text{(p-a.s).}$$

按 Kronecker 引理：若$\lim_{n\to\infty}m_n$(a.s)存在且有限，则

$$\frac{\xi_n}{A_n}=\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot\Delta m_k\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\text{(p-a.s).}$$

因此，为证命题(i)，只需证明：$\{m_n\to\}=\Omega$ (p-a.s).

由定理4.7.6知：$\{\langle m,m\rangle_\infty<\infty\}\subseteq\{m_n\to\}$ (p-a.s). 由(i)中的条件知：$\{\langle m,m\rangle_\infty<\infty\}=\Omega$ (p-a.s)，故$\{m_n\to\}$ (p-a.s).

现证命题(ii). 为此，需要用到如下分析中的结论：

"命题(*)：若 $a_n>0,n\geqslant1;b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n^2}<\infty$."

定义：$A_i=\begin{cases}\langle\xi,\xi\rangle_i, & \text{若}\langle\xi,\xi\rangle_i>0,\\ 1, & \text{否则},\end{cases}\quad i\geqslant1,$

则 $A_i\uparrow\infty$(a.s). 且可料. 注意，若$\langle\xi,\xi\rangle_i=0$，则由于$\langle\xi,\xi\rangle_i=\sum_{k=1}^{i}E((\Delta\xi_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})$而有 $E((\Delta\xi_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})=0$ (p-a.s) $(1\leqslant k$

$\leqslant i$).

令 $\Omega'=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{\langle\xi,\xi\rangle_i>0\}$，则 $\Omega'=\Omega$ (p-a.s). 注意，对任意 $\omega\in\Omega'$，$\exists\ i\geqslant 1$，$\ni\omega\in\{\langle\xi,\xi\rangle_i>0\}$. 利用"命题(*)"，即可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E((\Delta\xi_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})}{A_k^2}=\sum_{k=i}^{\infty}\frac{E((\Delta\xi_k)^2|\mathscr{F}_{k-1})}{\langle\xi,\xi\rangle_k^2}<\infty.$$

于是，由结论(i)知：$\dfrac{\xi_n}{A_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (p-a.s)于 Ω' 上. 从而

$$\frac{\xi_m}{\langle\xi,\xi\rangle_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\text{(p-a.s)于 }\Omega'=\Omega\text{ 上}.$$

定理4.7.6 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\in T_\infty\}$ 为下鞅，且其 Doob 分解为

$$\xi_n=m_n+A_n\quad(n\in T_\infty).$$

若 $|\Delta\xi_n|\leqslant C$，(p-a.s)，其中 C 为某正常数，则

$$\{\langle m,m\rangle_\infty+A_\infty<\infty\}=\{\xi_n\to\}$$

或
$$\{\sum_{n=1}^{\infty}E(\Delta\xi_n+(\Delta\xi_n)^2|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}=\{\xi_n\to\}.$$

证 注意：$E(\sup\limits_n|\Delta m_n|^2)\leqslant 4C^2<\infty$，且 m 为平方可积鞅. 因此，按定理4.7.4，$\{\langle m,m\rangle A_\infty<\infty\}=\{m_n\to\}$ (p-a.s). 由 ξ 的 Doob 分解知

$$\{\langle m,m\rangle_\infty+A_\infty<\infty\}\subseteq\{\xi_n\to\}\quad\text{(p-a.s)}.$$

由引理4.7.2知：$(\xi-\xi_0)\in C^+$. 于是，按定理4.7.3，有

$$\{\xi_n\to\}\subseteq\{A_\infty<\infty\}\quad\text{(p-a.s)}.$$

$$\begin{aligned}\{\xi_n\to\}&=\{\xi_n\to\}\cap\{A_\infty<\infty\}=\{\xi_n\to\}\cap\{A_\infty<\infty\}\cap\{m_n\to\}\\&=\{\xi_n\to\}\cap\{A_\infty<\infty\}\cap\{\langle m,m\rangle_\infty<\infty\}\\&=\{\langle m,m\rangle_\infty+A_\infty<\infty\}.\end{aligned}$$

定理4.7.7 设 $\xi=\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为一随机列，$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$，$C$ 为某个正常数，则级数 $\sum\xi_n$ 在如下集 A 上收敛：

$$A=\{\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|\geqslant C|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}\cap\{\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi_n^c|\mathscr{F}_{n-1})$$

$$< \infty\} \cap \{\sum_{n=1}^{\infty} V(\xi_n^c | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\},$$

其中 $\xi_n^c = \xi_n \cdot \chi_{\{|\xi_n| \leqslant C\}}$, $V(\eta | \mathscr{F}) = E[(\eta - E(\eta | \mathscr{F}))^2 | \mathscr{F}]$.

证 让 $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. 按推论4.7.3，有

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geqslant C | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{|\xi_n| \geqslant C\}} < \infty\} \quad \text{(p-a.s)}.$$

于是

$$A \cap \{X_n \to\} = A \cap \{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \chi_{\{|\xi_k| \leqslant C\}} \to\}$$

$$= A \cap \{\sum_{k=1}^{n} \eta_k \to\} \quad \text{(p-a.s)},$$

其中 $\eta_k = \xi_k^c - E(\xi_k^c | \mathscr{F}_{k-1})$.

令 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$，则 Y 为平方可积鞅，且 $|\eta_k| \leqslant 2C$. 于是，按定理4.7.6，有 $\{\langle Y, Y\rangle_\infty < \infty\} = \{Y_n \to\}$ (p-a.s). 注意：$V(\xi_n^c | \mathscr{F}_{n-1}) = E(\eta_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}) = \Delta\langle Y, Y\rangle_n$. 从而，$\langle Y, Y\rangle_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} V(\xi_n^c | \mathscr{F}_{n-1})$. 从而

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} V(\xi_n^c | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{Y_n \to\} \quad \text{(p-a.s)},$$

故 $\qquad A \cap \{X_n \to\} = A$. 从而，$A \subseteq \{X_n \to\}$ (p-a.s).

注 上述结论是 Kolmogorov 三级数定理的推广. 事实上，假定 $\xi_n, n \geqslant 1$，是独立 r.v. 列. 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则

$$A = \{\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| \geqslant C\} < \infty\} \cap \{\sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_n^c) < \infty\}$$

$$\cap \{\sum_{n=1}^{\infty} V(\xi_n^c) < \infty,\}.$$

因此，$A = \varnothing$ 或 Ω. 按上述定理，$A \subseteq \{X_n \to\}$ (p-a.s). 若 $A = \varnothing$，则三级数中至少有一个发散. 采用类似的分析，即可知 $\{X_n \to\} = \varnothing$ (p-a.s)，故：$\{X_n \to\} = A$ (p-a.s). 这就是 K 氏三级数定理.

第五章　半鞅(Ⅱ)

本章是半鞅的续篇.前一章的许多结论都可以平移过来,但使这些结论成立的条件有的不再像离散参数情形那样简明.本章最主要的结果是拟鞅的Riesz分解及关于势的Doob-Meyer定理.这些结果的最重要的应用在于平方可积鞅.此外,我们还将介绍正则势等有关内容.主要讨论对象仍是L_1空间中的半鞅.所以涉及到的随机变量均定义在某个完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上.

本章的某些常用符号定义如下:

$$T_a=[0,a],a\in\mathbf{R}^+=[0,\infty);$$

$$T_\infty=\mathbf{R}^+,\overline{T}_\infty=\mathbf{R}^+ + \{\infty\};$$

$T=T_a$ 或 T_∞;

$\mathscr{F}_t,t\in T$,为 $\mathscr{F}$ 中的σ-代数流;

$\mathscr{F}_{t+},t\in T_\infty$,表示右连续$\sigma$-代数流;

$\mathscr{F}_{t-},t\in T,\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0$,表示左连续$\sigma$-代数流;

$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap\limits_{t<s}\mathscr{F}_s,\mathscr{F}_{t-}=\sigma(\bigcup\limits_{s<t}\mathscr{F}_s),t\in T\backslash\{0\}.$

注　当比较随机变量时,比较关系的成立均在"p-a.c"意义下理解.有时在关系式之后注明"a.c".但经常省去这种注明.

§1　半鞅概念及例

假定过程$\xi(t),t\in T$,定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上.如果$\xi(\cdot)$适应于$\mathscr{F}_\cdot$,即对$\forall\ t\in T,\xi(t)$是$\mathscr{F}_t$-可测的,则采用符号$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$表示具有这种性质的随机过程.

定义5.1.1　考虑随机过程$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$,且对每个$t\in T$,

$\xi(t)\in L_1$. 让 s、$t\in T$，且 $s\leqslant t$.

若 $E(\xi(t)|\mathscr{F}_s)\leqslant\xi(s)$，则称此过程为上鞅；

若 $E(\xi(t)|\mathscr{F}_s)=\xi(s)$，则称此过程为鞅；

若 $E(\xi(t)|\mathscr{F}_s)\geqslant\xi(s)$，则称此过程为下鞅.

若此过程能表示成如下形式：

$$\xi(t)=\mu(t)+A(t),t\in T, \tag{5.1.1}$$

其中，$\mu(\cdot)$为鞅，而 $A(\cdot)$为其样本函数以概率1具有有界变差的随机过程，则称此过程为半鞅.

从此定义中可以看出：一般的半鞅可表示成前三种特殊半鞅的代数和，这是因为 $A(\cdot)$可表示成两个增过程之差，而增过程为下鞅. 因此在今后所涉及的半鞅如无特别说明均指这个定义中的前三种特别半鞅.

按 Doob 可分定理，总可假定半鞅是可分的. 以后如无特别申明，所涉及的过程总是可分的.

从定义中可以看出：鞅既是上鞅，又是下鞅，鞅的线性组合仍为鞅. 此外，上一章中的引理4.1.1～4.1.3及推论4.1.1对于连续参数情形显然成立.

例5.1.1 设 $W(t),t\in T$ 为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可积随机过程，其样本函数以概率1连续，且 $W(0)=0$. 让

$$\mathscr{F}_t=\sigma(W(u):0\leqslant u\leqslant t),t\in T.$$

如果此过程还具有独立增量性质，及 $EW(t)=0\quad(t\in T)$，则此过程必为鞅.

事实上，对$\forall\ s,t\in T,s\leqslant t$，有

$$\begin{aligned}E(W(t)|\mathscr{F}_s)&=E(W(t)-W(s)+W(s)|\mathscr{F}_s)\\&=W(s)+E(W(t)-W(s)|\mathscr{F}_s)=W(s).\end{aligned}$$

#

引理5.1.1 设$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$为上鞅，且$\exists$ r.v. $\eta\in L_1$，使得

$$\xi(t)\geqslant E(\eta|\mathscr{F}_t),t\in T. \tag{5.1.2}$$

如果 $s_n\in T$，且 $s_n\downarrow$，则变量族 $\xi(s_n),n\geqslant 1$，一致可积.

证 由上鞅性，对$\forall\ n\geqslant 1$，有$E\xi(s_n)\leqslant E\xi(0)$. 从条件(5.1.2)式中可以推出

$$\xi^-(s_n)\leqslant(E(-\eta|\mathscr{F}_{s_n}))^+\leqslant E(|\eta||\mathscr{F}_{s_n});$$

$$E\xi^-(s_n)\leqslant E|\eta|.$$

从而，对$\forall\ n\geqslant 1$，有

$$E|\xi(s_n)|=2E\xi^-(s_n)+E\xi(s)\leqslant 2E|\eta|+E\xi(0)=C<\infty.$$

于是

$$P(|\xi(s_n)|>\lambda)\leqslant\frac{E|\xi(s_n)|}{\lambda}\leqslant\frac{C}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0\text{关于 } n\geqslant 1\text{一致成立.}\quad(5.1.3)$$

注意：$E\xi(0)\geqslant E\xi(s_n)\geqslant E\eta$，且$E\xi(s_n)\uparrow$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}E\xi(s_n)$有限，且$\lim\limits_{n\to\infty}E\xi(s_n)\geqslant E\xi(s_k)\quad(\forall\ k\geqslant 1)$.

由此式及(5.1.3)式可知：对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ k=k(\varepsilon)\geqslant 1$及$\lambda'=\lambda(\varepsilon)>0$，使当$n\geqslant k$和$\lambda\geqslant\lambda'$时，

$$E\xi(s_n)-E\xi(s_k)\leqslant\varepsilon,\ \int_{A_{n,\lambda}}|\xi(s_k)|\mathrm{d}P<\varepsilon,$$

其中 $A_{n,\lambda}=\{|\xi(s_n)|>\lambda\}\in\mathscr{F}_{s_n}$. 由上鞅性，对$\forall\ n\geqslant k$及$\lambda\geqslant\lambda'$，有

$$\int_{A_{n,\lambda}}|\xi(s_n)|\mathrm{d}P\leqslant\int_{A_{n,\lambda}}[\xi(s_n)-E(\xi(s_k)|\mathscr{F}_{s_n})]\mathrm{d}P$$

$$+\int_{A_{n,\lambda}}E(|\xi(s_k)||\mathscr{F}_{s_n})\mathrm{d}P\leqslant 2\varepsilon,$$

故 $\limsup\limits_{\lambda\to\infty\ n\geqslant k}\int_{A_{n,\lambda}}|\xi(s_n)|\mathrm{d}P\leqslant\varepsilon$. 显然

$$\limsup_{\lambda\to\infty\ n<k}\int_{A_{n,\lambda}}|\xi(s_n)|\mathrm{d}P=0\quad(\forall\ k\geqslant 1),$$

于是
$$\limsup_{\lambda\to\infty\ n}\int_{A_{n,\lambda}}|\xi(s_n)|\mathrm{d}P\leqslant\varepsilon.$$

由此即知：$\{\xi(s_n(,n\geqslant 1\}$满足一致可积性条件.

设I为T中一可数稠集. $\{s_n^*,n\geqslant 1\}\subset I$，且$s_n^*\uparrow a$，$a=\sup\{t,t\in T\}$. $I_n=[0,s_n^*]\cap I$. 用$\{t_i,0\leqslant i\leqslant k-1\}$表示$I_n$的前$k$个元素，重排后可假定：$t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}$. 令$I_n^{(k)}=\{t_i,0\leqslant i\leqslant k\}$，其中$t_k=s_n^*$.

$\nu_{\xi,k}^{(n)}(r_1,r_2)$表示序列 $\xi(t),t\in I_n^{(k)}$,关于$(r_1,r_2]$的上穿数. 令 $\nu_\xi^{(n)}(r_1,r_2)=\lim\limits_{k\to\infty}\nu_{\xi,k}^{(n)}(r_1,r_2)$,则称 $\nu_\xi^{(n)}(r_1,r_2)$为序列 $\xi(t),t\in I_n$,关于$(r_1,r_2]$的上穿数.

引理5.1.2 设$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$为上鞅,则

$$E\nu_\xi^{(n)}(r_1,r_2)\leqslant\frac{1}{r_2-r_1}E(\xi(s_n^*)-r_1)^-,\qquad(5.1.4)$$

其中,$r_1,r_2\in T$,且 $r_1<r_2$.

证 注意:上一章中的公式(4.3.8)是一个关于下鞅的下穿数估计式. 由此,立即可得出上鞅的上穿数的估计,即 $E\nu_{\xi,k}^{(n)}(r_1,r_2)\leqslant\frac{1}{r_2-r_1}E(\xi(s_n^*)-r_1)^-$. 由单调收敛定理可知

$$E\nu_\xi^{(n)}(r_1,r_2)=\lim_{k\to\infty}E\nu_{\xi,k}^{(n)}(r_1,r_2)\leqslant\frac{1}{r_2-r_1}E(\xi(s_n^*)-r_1)^-.$$

在本章所考虑的过程一般都假定是右连续的. 那么,什么样的半鞅过程可以在随机等价意义下是右连续的呢?下述定理回答了这个问题.

定理5.1.1 设 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+},t\in T$,则上鞅$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$具有一右连续修正的充要条件是:函数 $m(t)=E\xi(t),t\in T$,右连续.

证 必要性. 假定$\{\tilde{\xi}(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$为此过程的右连续修正,即 $P(\xi(t)=\tilde{\xi}(t))=1\quad(t\in T)$. 从而,$E\tilde{\xi}(t)=E\xi(t),t\in T$. 任取数列$\{s_n,n\geqslant1\}\subset T$,且 $s_n\downarrow t$. 令 $\eta=\xi(t)$,则由上鞅性,有 $\xi(s_n)\geqslant E(\eta|\mathscr{F}_{s_n})\quad(n\geqslant1)$. 从而,由引理5.1.1,随机列 $\xi(s_n),n\geqslant1$,一致可积. 于是,$\tilde{\xi}(s_n),n\geqslant1$,一致可积. 另由 $\tilde{\xi}(t)$的右连续性,有 $\tilde{\xi}(s_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.c}}\tilde{\xi}(t)$. 故$L_1\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\xi}(s_n)=\tilde{\xi}(t)$. 这意味着 $m(t)=E\xi(t)=E\tilde{\xi}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}E\tilde{\xi}(s_n)=\lim\limits_{n\to\infty}E\xi(s_n)$. 由此及 $s_n\downarrow t$ 的任意性:$m(t)$右连续.

充分性. 令 $A_n(r_1,r_2)=\{\omega:\nu_\xi^{(n)}(r_1,r_2)=\infty\}$,$Q$ 为 R 中有理数全体,则按引理5.1.2,有

$$P(A_n(r_1,r_2))=0\quad(n\geqslant1,r_1,r_2\in Q,r_1<r_2).$$

让 $A=\bigcup\limits_{(n,r_1,r_2)}A_n(r_1,r_2)$,其中$(n,r_1,r_2)\in\{(n,r_1,r_2):n\geqslant1,r_1、r_2\in$

$Q, r_1 < r_2\}$，则 $P(A)=0$. 于是，对 $\forall\ \omega \in A^c$，有

$$\nu_\xi^{(n)}(r_1, r_2) < \infty \quad (n \geqslant 1, r_1, r_2 \in Q, r_1 < r_2).$$

这表明：对 $\forall\ \omega \in A^c$，$\xi(t), t \in T$，在任意 $t \in T$ 处具有右（或左）极限：

$$\xi(t_+, \omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in I}} \xi(s, \omega). \tag{5.1.5}$$

现在定义

$$\xi_+(t) = \begin{cases} \xi(t_+, \omega), & 若\ \omega \in A^c; \\ 0, & 若\ \omega \in A \quad (\forall\ t \in T); \end{cases} \tag{5.1.6}$$

则过程 $\{\xi_+(t), \mathscr{F}_{t+1}, t \in T\}$ 就是所要求的右连续修正且为上鞅. 下面证明这个结论.

让 $\{s_n, n \geqslant 1\} \subset I$ 为具有 $s_n \downarrow t$ 的任意数列. 由上鞅性，知

$$\xi(t) \geqslant E(\xi(s_n) | \mathscr{F}_t) \quad (n \geqslant 1).$$

从而，由 Fatou 引理及 $\mathscr{F}_t$ 的右连续性可得

$$\begin{aligned} \xi(t) &\geqslant \varliminf_{n \to \infty} E(\xi(s_n) | \mathscr{F}_t) \geqslant E(\varliminf_{n \to \infty} \xi(s_n) | \mathscr{F}_t) \\ &= E(\xi_+(t) | \mathscr{F}_t) = \xi_+(t), \end{aligned}$$

故

$$P(\xi(t) \geqslant \xi_+(t)) = 1 \quad (\forall\ t \in T). \tag{5.1.7}$$

注意：$m(t) = E\xi(t), t \in T$，是右连续的. 那么，利用引理5.1.1可得：$E\xi(t) = \lim_{n \to \infty} E\xi(s_n) = E(\lim_{n \to \infty} \xi(s_n)) = E\xi_+(t) \quad (t \in T)$.

即

$$E(\xi(t) - \xi_+(t)) = 0.$$

此式及(5.1.7)式就意味着

$$P(\xi(t) = \xi_+(t)) = 1 \quad (t \in T). \tag{5.1.8}$$

这表明：$\{\xi_+(t), \mathscr{F}_t, t \in T\}$ 是 $\{\xi(t), \mathscr{F}_t, t \in T\}$ 的一个右连续修正.

最后证明：$\xi_+(\cdot)$ 为上鞅.

设 $s, t \in T$，且 $s < t$. $s_n \in I, n \geqslant 1$，使得：$t \geqslant s_n \downarrow s$. 利用引理5.1.1及 $\xi(\cdot)$ 的上鞅性可推出

$$\begin{aligned} \xi_+(s) &= E(\xi_+(s) | \mathscr{F}_s) = \lim_{n \to \infty} E(\xi(s_n) | \mathscr{F}_s) \\ &\geqslant \lim_{n \to \infty} E(E(\xi(t) | \mathscr{F}_{s_n}) | \mathscr{F}_s) = E(\xi(t) | \mathscr{F}_s). \end{aligned}$$

考虑到(5.1.8)式，立即可得

$$\xi_+(s) \geqslant E(\xi_+(t) \mid \mathscr{F}_s).$$

推论5.1.1 若 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}, t \in T$，则任意鞅 $\{\xi(t), \mathscr{F}_t, t \in T\}$ 都允许有一个右连续修正.

证 因为 $m(t) = E\xi(t) = E\xi(0), t \in T$，因此，$m(t)$ 连续，故上述定理的条件满足.

§2 半鞅的右闭性

从前一章中可以看出，半鞅的右闭性与其一致可积性有着密切关系. 本节讨论在连续参数情形下的右闭性问题.

定义5.2.1 设 $\{\xi(t), \mathscr{F}_t, t \in T_\infty\}$ 为半鞅. 若存在 $(\xi_\infty, \mathscr{F}_\infty)$ 满足下列条件：

(i) $\mathscr{F}_\infty$ 为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ-代数，且 $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_\infty \quad (t \in T)$；

(ii) ξ_∞ 是 $\mathscr{F}_\infty$-可测得，且 $\xi_\infty \in L_1$；

(iii) $\{\xi(t), \mathscr{F}_{(t)}, t \in \overline{T}_\infty\}$ 亦为半鞅，这里 $\xi(\infty) = \xi_\infty$；

则称此半鞅右闭，并称 $(\xi_\infty, \mathscr{F}_\infty)$ 为此半鞅的右闭元.

以下，我们总假定

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{r \in Q^+} \mathscr{F}_r\Big), Q^+ = \{r : r \text{ 为 } \mathbf{R}^+ \text{中的有理数}\}.$$

这是因为若 $(\xi'_\infty, \mathscr{F}'_\infty)$ 为右闭元，则令 $\xi_\infty = E(\xi'_\infty \mid \mathscr{F}_\infty)$，$(\xi_\infty, \mathscr{F}_\infty)$ 必为右闭元.

引理5.2.1 设 $f_i(t), i = 1, 2$，为关于 $t \in T$ 的一致可积随机过程. 若随机过程 $\xi(\cdot)$ 满足条件：

$$f_1(t) \leqslant \xi(t) \leqslant f_2(t) \quad (t \in T), \tag{5.2.1}$$

则 $\xi(t), t \in T$，一致可积.

证 (5.2.1)式 $\Rightarrow f_1^+(t) \leqslant \xi^+(t) \leqslant f_2^+(t)$，$f_2^-(t) \leqslant \xi^-(t) \leqslant f_1^-(t), t \in T$. 因此，不妨设 $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \xi(\cdot)$ 均是非负的.

注意：$f_2(t), t \in t$，一致可积等价于：

(i) $\exists\, c > 0, \ni Ef_2(t) \leqslant c \quad (t \in T)$，

(ii)$E(\chi_{(f_2(t)>\lambda)}\cdot f_2(t))\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0$关于 $t\in T$ 一致成立.

此外,对$\forall\ \lambda>0$,由条件(5.2.1)式可知

$$\{\xi(t)>\lambda\}\subset\{f_2(t)>\lambda\}\quad(\forall\ t\in T).$$

于是,

$$E(\chi_{\xi(t)>\lambda}\cdot\xi(t))\leqslant E(\chi_{(f_2(t)>\lambda)}\cdot\xi(t))$$

$$\leqslant E(\chi_{(f_2(t)>\lambda)}\cdot f_2(t))\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0\text{关于 } t\in T \text{ 一致成立}.$$

显然,$E\xi(t)\leqslant Ef_2(t)\leqslant c\quad(t\in T)$,故 $\xi(\cdot)$满足(i)和(ii).从而 $\xi(t),t\in T$ 一致可积. #

引理5.2.2 鞅$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$右闭的充要条件是:$\xi(t),t\in T_\infty$一致可积.

证 设 $s_n\in T_\infty,n\geqslant 1$,且 $s_n\uparrow\infty$. 令 $\zeta_n=\xi(s_n),\mathscr{F}'_n=\mathscr{F}_{s_n}$,则$\{\zeta_n,\mathscr{F}'_n,n\geqslant 1\}$为鞅.按推论4.4.2,$\zeta$.右闭的充要条件是一致可积.而这等价于:$\exists\ \eta\in L_1$,使得

$$\zeta_n=E(\eta|\mathscr{F}'_n).$$

于是:对$\forall\ t\in T_\infty$,有

$$\xi(t)=E(\eta|\mathscr{F}_t).$$

对$\forall\ \lambda>0$. $A_{t,\lambda}=\{|\xi(t)|>\lambda\}\in\mathscr{F}_t$,从而

$$\int_{A_{t,\lambda}}|\xi(t)|\mathrm{d}P\leqslant\int_{A_{q}t,\lambda}E(|\eta||\mathscr{F}_t)\mathrm{d}P=\int_{A_{t,\lambda}}|\eta|\mathrm{d}P.$$

$P(A_{t,\lambda})\leqslant\dfrac{E|\xi(t)|}{\lambda}\leqslant\dfrac{E|\eta|}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0$ 关于 $t\in T$ 一致成立,故 $\int_{A_{t,\lambda}}|\xi(t)|\mathrm{d}P\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0$ 关于$t\in T$ 一致成立.

于是,$\xi(t),t\in T$,一致可积.

定理5.2.1 非负下鞅$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$右闭的充要条件是此下鞅一致可积.

证 如果 $\xi(\cdot)$右闭,则$\exists\ \eta\in L_1$,使得

$$\xi(t)\leqslant E(\eta|\mathscr{F}_t)\quad(t\in T_\infty).$$

注意:$\xi(t)\geqslant 0$. 于是,按引理5.2.1和5.2.2,$\xi(\cdot)$一致可积.

反之，设 $\xi(\cdot)$ 一致可积. 任意选取 $0\leqslant s_n<\infty$，且 $s_n\uparrow\infty$. 令 $\zeta_n=\xi(s_n)$，$\mathscr{F}'_n=\mathscr{F}_{s_n}$ $(n\geqslant1)$，则 $\{\zeta_n,\mathscr{F}'_n,n\geqslant1\}$ 为一致可积的非负下鞅. 按定理4.4.1，$\zeta_\cdot$ 右闭. 于是，存在 $\xi_\infty\in L_1$，使得 $\zeta_n\leqslant E(\xi_\infty|\mathscr{F}'_n)$，即 $\xi(s_n)\leqslant E(\xi_\infty|\mathscr{F}_{s_n})$ $(n\geqslant1)$. 那么，对 $\forall\ t\in T_\infty$，$\exists\ n\geqslant1$，使得 $t\leqslant s_n$，而有

$$\xi(t)\leqslant E(\zeta_n|\mathscr{F}_t)=E(\xi_\infty|\mathscr{F}_t),$$

故 ξ_∞ 为 $\xi(\cdot)$ 的右闭元. #

推论5.2.1 下鞅 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 右闭的充要条件是 $\xi^+(t),t\in T_\infty$，一致可积.

证 注意：$\xi^+(\cdot)$ 仍为下鞅，且非负. 由于

$$\xi(t)\leqslant\xi^+(t)\quad(t\in T_\infty),$$

因此，$\xi(\cdot)$ 的右闭问题就转化为 $\xi^+(\cdot)$ 的右闭问题. 利用定理5.2.1立即可得此结论.

定理5.2.2（鞅停时代换） 设 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 为右连续右闭鞅，$\tau_i,i\geqslant1$，为任意单调非降的 $\mathscr{F}_\cdot$-时列，则 $\{\xi(\tau_i),\mathscr{F}_{\tau_i},i\geqslant1\}$ 为右闭鞅.

证 $\tau_\cdot$ 单调非降表明：$\exists\ \mathscr{F}_\cdot$-时 τ，使得 $\tau_i\uparrow\tau$ 当 $i\uparrow\infty$ 时. 如果 $\xi(\cdot)$ 为右闭鞅，则 $\exists\ (\xi_\infty,\mathscr{F}_\infty)$，使得

$$\xi(t)=E(\xi_\infty|\mathscr{F}_t)\quad(t\in T_\infty).$$

令 $\xi_\tau=E(\xi_\infty|\mathscr{F}_\tau)$，则 $\xi_\tau\in L_1$，且对 $\forall\ i\geqslant1$，

$$E(\xi_\tau|\mathscr{F}_{\tau_i})=E(E(\xi_\infty|\mathscr{F}_\tau)|\mathscr{F}_{\tau_i})=E(\xi_\infty|\mathscr{F}_{\tau_i})=\xi(\tau_i),$$

故 $(\xi_\tau,\mathscr{F}_\tau)$ 为鞅 $\{\xi(\tau_i),\mathscr{F}_{\tau_i},i\geqslant1\}$ 的右闭元.

§3 拟 鞅

本节讨论拟鞅，并将看到，它实际上是定义5.1.1的三类特殊半鞅的线性组合.

考虑随机过程 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$. 设 $t\in T$，$r_1,r_2\in R$，$r_1<r_2$. 让 $\underline{\nu}_\xi^{(t)}(r_1,r_2)$ 和 $\overline{\nu}_\xi^{(t)}(r_1,r_2)$ 分别表示 $\xi(s),s\in T_t$，关于 $[r_1,r_2)$ 和 $(r_1,r_2]$

的下、上穿数. 令

$$\psi(s,t)=E(\xi(s)-\xi(t)|\mathscr{F}_s) \quad (s,t\in t,s<t). \tag{5.3.1}$$

$$V_t^{(\pm)}=\sup\{E(\sum_{i=1}^{n}\psi^{(\mp)}(t_{i-1},t_i)),n\geqslant 1,$$
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}, \tag{5.3.2}$$

仿此引理5.1.2, 对$\forall\ t\in T$, 可得

$$E\underline{\nu}_\xi^{(t)}(r_1,r_2)\leqslant\frac{1}{r_2-r_1}(E(\xi(t)-r_2)^+ +V_t^{(-)}), \tag{5.3.3}$$

$$E\bar{\nu}_\xi^{(t)}(r_1,r_2)\leqslant\frac{1}{r_2-r_1}(E(\xi(t)-r_1)^- +V_t^{(+)}). \tag{5.3.4}$$

让$\|V_t\|=V_t^{(-)}+V_t^{(+)}$, $V^{(\pm)}=\lim\limits_{t\uparrow\bar{t}}V_t^{(\pm)}$, $\bar{t}=\sup\{t:t\in T\}$.

$$\|V\|=V^{(-)}+V^{(+)}. \tag{5.3.5}$$

定理5.3.1 假设随机过程$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$满足下列两条件之一:

(i) $\sup\{E\xi^+(t),t\in T_\infty\}<\infty, V^{(-)}<\infty$;

(ii) $\sup\{E\xi^-(t),t\in T_\infty\}<\infty, V^{(+)}<\infty$;

则此过程(a.c)收敛到某个 r.v. $\xi(\infty)$, 而且

如果条件(i)成立, 则 $\xi^+(\infty)\in L_1$;

如果条件(ii)成立, 则 $\xi^-(\infty)\in L_1$;

如果条件(i)和(ii)同时成立, 则 $\xi(\infty)\in L_1$.

证 对$\forall\ s_n\in T_\infty,n\geqslant 1$, 且 $s_n\uparrow\infty$, 按定理4.3.3, 结论对随机列$\{\xi(s_n),\mathscr{F}_{s_n},n\geqslant 1\}$成立. 极限 $\xi(\infty)=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\xi(s_n)$与数列$\{s_n,n\geqslant 1\}$的选择无关. 这个事实, 只要将两个不同的数列 s_n' 和 s_n'', $n\geqslant 1$, 合并起来得一新的数列 $s_n,n\geqslant 1$, 对这三个数列应用同一定理, 即可明白. #

定义5.3.1 如果随机过程$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$满足条件

$$\|V\|<\infty, \tag{5.3.6}$$

其中, $\|V\|$由(5.3.5)式定义, 则称此过程为拟鞅.

引理5.3.1 若半鞅$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$满足条件:

$$\lim_{t\to\infty}|E\xi(t)|<\infty, \tag{5.3.7}$$

则此半鞅必为拟鞅.

证 按此半鞅之定义，由(5.3.1)式定义的 $\psi(t_{i-1},t_i)$ 是定号的. 又半鞅的 $E\xi(t), t\in T_\infty$，具有单调性. 因此，由条件(5.3.7)式，有

$$\|V\|=\lim_{t\to\infty}|E\xi(t)-E\xi(0)|\leqslant E|\xi(0)|+\lim_{t\to\infty}|E\xi(t)|<\infty,$$

故拟鞅条件(5.3.6)式满足. #

引理5.3.2 若 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 为拟鞅，则 $f(t)=E\xi(t)$，$t\in T_\infty$，为有界变差函数.

证 对 $\forall\ n\geqslant 1$，及 $t_i\in T_\infty$，$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)| &= \sum_{i=1}^{n}|E\psi(t_{i-1},t_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}E|\psi(t_{i-1},t_i)|\leqslant\|V\|<\infty,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}V_{T_\infty}(f)=\sup\{&\sum_{i=1}^{n}|f(t_{i-1})-f(t_i)|:n\geqslant 1,\\ &0=t_0<t_1<\cdots<t_n,t_i\in T_\infty\}\\ &\leqslant\|V\|<\infty.\end{aligned}$$

引理5.3.3 设 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 为拟鞅，定义

$$\xi_t(s)=E(\xi(t+s)|\mathscr{F}_t)\quad(s,t\in T_\infty). \tag{5.3.8}$$

则对 $\forall\ t\in T_\infty$，$\eta(t)=\text{a.c-}\lim_{s\to\infty}\xi_t(s)$ 存在，且对 $\forall\ s_n\uparrow\infty$，有

$$L_1\text{-}\lim_{n\to\infty}\xi_t(s_n)=\eta(t).$$

证 任意固定 $t\in T_\infty$. 由 Jensen 不等式可知

$$E|\xi_t(s)|\leqslant E|\xi(t+s)|<\infty.$$

从而，对 $\forall\ s\in T_\infty$，$\xi_t(s)\in L_1$. 此外，对 $\forall\ \{t_i,0\leqslant i\leqslant n\}\subset T_\infty$，

$$\begin{aligned}&E\left(\sum_{i=0}^{n}|\xi_t(t_i)-E(\xi_t(t_{i+1})|\mathscr{F}_{t+t_i})|\right)\\ &\leqslant E\left(\sum_{i=0}^{n}|\xi_t(t_i)-\xi_t(t_{i+1})|\right)\end{aligned}$$

$$= E(\sum_{i=0}^{n} |E(\xi(t+t_i)|\mathscr{F}_t) - E(\xi(t + t_{i+1})|\mathscr{F}_t)|)$$

$$\leqslant E(\sum_{i=0}^{n} |\psi(t+t_i, t+t_{i+1})|) \leqslant \|V\| < \infty.$$

注意：$\xi_t(s)$是$\mathscr{F}_{t_}$-可测的，更是$\mathscr{F}_{t+s}$-可测的。故$\{\xi_t(s), \mathscr{F}_{t+s}, s\in T_\infty\}$为拟鞅。注意：

$$\begin{aligned} E|\xi_t(s)| &\leqslant E|\xi_t(0)| + E|\xi_t(s) - \xi_t(0)| \\ &= E|\xi(t)| + E|\psi(t, t+s)| \\ &\leqslant E|\xi(t)| + \|V\| < \infty. \end{aligned}$$

从而 $\sup_s E|\xi_t(s)| \leqslant E|\xi(t)| + \|V\| < \infty$。于是，按定理5.3.1，有

$$\text{a.c-}\lim_{s\to\infty} \xi_t(s) = \eta(t) \in L_1 \quad (t\in T_\infty).$$

现在令 $G_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |\psi(t+s_i, t+s_{i+1})|$，则由拟鞅性及Fatou引理可知

$$EG_t \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} E(\sum_{i=0}^{n} |\psi(t+s_i, t+s_{i+1})|) \leqslant \|V\| < \infty.$$

于是，$G_t\in L_1$。因此，利用 Jensen 不等式，有

$$\begin{aligned} |\xi_t(s_n)| &\leqslant |\xi_t(s_1)| + \sum_{i=1}^{n} |\xi_t(s_i) - \xi_t(s_{i+1})| \\ &\leqslant |\xi_t(s_1)| + E(G_t|\mathscr{F}_t) \in L_1. \end{aligned}$$

应用 Lebesque 控制收敛定理即可得引理的结论。 #

定理5.3.2(Riesz 分解) 若$\{\xi(t), \mathscr{F}_t, t\in T_\infty\}$为一拟鞅，则此拟鞅可唯一地分解成如下形式：

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta(t) \quad (t\in T_\infty), \tag{5.3.9}$$

其中 $\eta(\cdot)$为鞅；$\zeta(\cdot)$为拟鞅，且$\lim_{t\to 0} E|\zeta(t)| = 0$.

证 按引理5.3.3，$\xi_t(s_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \eta(t)$。因此，对$\forall\, u, t\in T_\infty$，且 $u < t$，应用 Lebesque 收敛定理，下面关系式中的算子 E 和极限号 lim 的交换是允许的.

$$E(\eta(t)|\mathscr{F}_u)=E(\lim_{n\to\infty}\xi_t(s_n)|\mathscr{F}_u)=\lim_{n\to\infty}E(\xi(s_n+t)|\mathscr{F}_u)$$
$$=\lim_{n\to\infty}E(\xi(s_n'+u)|\mathscr{F}_u)=\eta(u),(\text{其中}s_n'=s_n+t-u),$$

故 $\eta(\cdot)$ 为鞅.

现在,令 $\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t),t\in T_\infty$,则 $\zeta(\cdot)$ 符合定理中的要求.事实上,从拟鞅的条件结构中不难看出:任何一个拟鞅加上一个鞅其结果仍为拟鞅.因此,$\zeta(\cdot)$ 为拟鞅.剩下的问题就是证明.

$$\text{当 } t\to\infty \text{ 时},E|\zeta(t)|\to 0.$$

假若不然,即存在一子列 $t_n\in T_\infty$, $n\geqslant 1$, 使得 $t_n\uparrow\infty$, 且 $\lim_{n\to\infty}E\ |\zeta(t_n)|=a>0$. 那么,对 $\forall\ \varepsilon:0<\varepsilon<a$,必存在 $K=K(\varepsilon)\geqslant 1$,使得对 $\forall\ k\geqslant K$,

$$E|\xi(t_k)-\lim_{s\to\infty}E(\xi(s+t_k)|\mathscr{F}_{t_k})|=E|\zeta(t_k)|>a-\varepsilon>0. \quad (5.3.10)$$

现在,任选 $t_{k_1}\geqslant K$,则由(5.3.10)式,必 $\exists\ k_2>k_1$,使得

$$E|\psi(t_{k_1},t_{k_2})|>a-\varepsilon.$$

再由(5.3.10)式知,$\exists\ k_3>k_2$,使得

$$E|\psi(t_{k_2},t_{k_3})|>a-\varepsilon.$$

继续上述作法,则可从 $\{t_n,n\geqslant 1\}$ 中选出一子列 $\{t_{k_i},i\geqslant 1\}$ 具有下列性质:

$$t_{k_{i+1}}>t_{k_i};E|\psi(t_{k_i},t_{k_{i+1}})|>a-\varepsilon\quad(i\geqslant 1).$$

于是,$\infty>\|V\|\geqslant E(\sum_{i=1}^{\infty}|\psi(t_{k_i},t_{k_{i+1}})|)\geqslant\infty\cdot(a-\varepsilon)=\infty.$

此矛盾是由 $a>0$ 引起的.故当 $t\to\infty$ 时,$E|\zeta(t)|\to 0$.

最后证明唯一性.

假定有两个满足相同要求的分解,即

$$\zeta_1(t)+\eta_1(t)=\xi(t)=\zeta_2(t)+\eta_2(t),t\in T_\infty,$$

那么,若 $\eta_1(t)=\eta_2(t),t\in T_\infty$,则立即得到分解的唯一性.

首先,我们有

$$E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=E|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)|$$
$$\leqslant E|\zeta_1(t)|+E|\zeta_2(t)|\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

其次

$$E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=E|E(\eta_1(t+h)-\eta_2(t+h)|\mathscr{F}_t)|$$
$$\leqslant E|\eta_1(t+h)-\eta_2(t+h)| \quad (\forall\ t\in T_\infty,h\geqslant 0).$$

因此，当 $t\uparrow\infty$ 时，$E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|\uparrow 0$，故

$$E|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=0, \quad (t\in T_\infty),$$

从而，$\eta_1(t)=\eta_2(t)$，(p-a.c)$(t\in T_\infty)$. #

推论5.3.1 设 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 为上鞅，且 $\lim\limits_{t\to\infty}E\xi(t)>-\infty$，则此上鞅可唯一地分解为

$$\xi(t)=\eta(t)+\zeta(t) \quad (t\in T_\infty),$$

其中 $\eta(\cdot)$ 为鞅；$\zeta(\cdot)$ 为非负上鞅，且 $\lim\limits_{t\to\infty}E\zeta(t)=0$.

证 按照引理5.3.1，$\xi(\cdot)$ 为拟鞅. 从而，按 Riesz 分解，$\eta(t)=$ a.c-$\lim\limits_{s\to\infty}E(\xi(t+s)|\mathscr{F}_t)$，$t\in T_\infty$，为鞅，上鞅加上一个鞅不影响上鞅性，即 $\zeta(\cdot)$ 为上鞅. 那么，定理5.3.2表明：仅剩证明：$\zeta(\cdot)$ 是非负的.

由 $\xi(\cdot)$ 的上鞅性，可知

$$\eta(t)=\lim_{s\to\infty}E(\xi(t+s)|\mathscr{F}_t)\leqslant\xi(t) \quad (t\in T_\infty),$$

故
$$\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t)\geqslant 0 \quad (t\in T_\infty).$$
#

推论5.3.2 若拟鞅 $\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$ 一致可积，则可唯一地分解为

$$\xi(t)=\eta(t)+\zeta(t) \quad (t\in T_\infty),$$

其中，$\eta(\cdot)$ 为右闭鞅；$\zeta(\cdot)$ 为一致可积拟鞅，且 $\lim\limits_{t\to\infty}E|\zeta(t)|=0$.

证 按照定理5.3.2，$\eta(t)=$ a.c-$\lim\limits_{s\to\infty}E(\xi(t+s)|\mathscr{F}_t)$，$t\in T_\infty$，为鞅. 现在要证明它是一个右闭鞅.

$\xi(\cdot)$ 一致可积保证：$\sup\limits_t E|\xi(t)|<\infty$. 再加上拟鞅性条件：$\|V\|<\infty$. 则定理5.3.1的条件满足. 从而，$\xi(s)\xrightarrow[s\to\infty]{\text{a.c}}\xi(\infty)\in L_1$. 再一次考虑到 $\xi(\cdot)$ 的一致可积性，我们得到：对 $\forall\ s_n\uparrow\infty$，$L_1$-$\lim\limits_{n\to\infty}\xi(s_n)=\xi(\infty)$. 于是，应用 Lebesque 收敛定理可得

$$\eta(t)=\lim_{n\to\infty}E(\xi(t+s_n)|\mathscr{F}_t)=E(\xi(\infty)|\mathscr{F}_t) \quad (t\in T_\infty),$$

故 $\eta(\cdot)$右闭.

至于$\zeta(\cdot)$的一致可积性则为一显然事实.

定义5.3.2 若拟鞅$\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$为满足条件:

$$\lim_{t\to\infty}E|\zeta(t)|=0, \tag{5.3.11}$$

则称它为拟势. 若$\zeta(\cdot)$为一个满足(5.3.11)式的非负上鞅,则称它为势.

按此引理5.3.1,非负上鞅为拟鞅. 因此,势是拟势的特例.

推论5.3.3 用QM,M,QP分别表示拟鞅、鞅、拟势类,则它们均为线性类,且

$$QM=M\oplus QP, \tag{5.3.12}$$

这里$\oplus$表示直和.

证 显然,这三个过程类均为线性类. 定理5.3.2表明:(5.3.12)式成立. 剩下的问题是证明:$M\cap QP$仅包含零元素. 事实上,假定:$\xi(\cdot)\in M\cap QP$,则

(i)$\xi(\cdot)\in M$,从而当$t\uparrow\infty$时,$E|\xi(t)|\uparrow$;

(ii)$\xi(\cdot)\in QP$,从而当$t\uparrow\infty$时,$E|\xi(t)|\to 0$;

故 $E|\xi(t)|=0,t\in T_\infty$. 即$\xi(\cdot)=0$ (p-a.c).

引理5.3.4 若$\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$为拟势,则$\zeta(t)\xrightarrow[t\to\infty]{\text{a.c}}0$.

证 显然,$\sup_t E|\zeta(t)|<\infty$. 又$\zeta(\cdot)$为拟鞅. 于是,我们可以引用定理5.3.1而得:a.c-$\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\eta\in L_1$. 利用Fatou引理,则得

$$E|\eta|\leqslant\varliminf_{t\to\infty}E|\zeta(t)|=0.\ 故\ \eta=0 \quad (\text{a.c}). \qquad \#$$

引理5.3.5 设$\{\zeta_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为一离散拟势,则它可分解为两个离散拟势之差,即

$$\zeta_n=\pi_+^{(n)}-\pi_-^{(n)} \quad (n\geqslant 0),$$

其中$\pi_\pm^{(n)},n\geqslant 0$,为离散拟势.

证 令$\psi_n=-E(\Delta\zeta_{n+1}|\mathscr{F}_n),\Delta\zeta_{n+1}=\zeta_{n+1}-\zeta_n \quad (n\geqslant 0)$.

从引理5.3.4中可知：$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.c} 0$，因此

$$\zeta_n = \sum_{k=n}^{\infty}(-\Delta\zeta_{k+1})$$

$$= E(-\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\zeta_{k+1}|\mathscr{F}_n) = E(\sum_{k=n}^{\infty}\psi_k|\mathscr{F}_n).$$

让 $\pi_{\pm}^{(n)} = E(\sum_{k=n}^{\infty}\psi_k^{\pm}|\mathscr{F}_n)$，则

$$\zeta_n = \pi_{+}^{(n)} - \pi_{-}^{(n)} \quad (n \geqslant 0).$$

现在，我们来证明：$\pi_{\pm}^{(n)}, n \geqslant 0$为势.

显然，$\pi_{\pm}^{(n)} \geqslant 0, (n \geqslant 0)$. 由拟鞅性知：$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^{\pm} \in L_1$. 因而，$E\pi_{\pm}^{(n)} = E(\sum_{k=n}^{\infty}\psi_k^{\pm}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. 此外

$$\pi_{\pm}^{(n)} = E(\sum_{k=n}^{\infty}\psi_k^{\pm}|\mathscr{F}_n) \geqslant E(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi_k^{\pm}|\mathscr{F}_n)$$

$$= E(E(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi_k^{\pm}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n)$$

$$= E(\pi_{\pm}^{(n+1)}|\mathscr{F}_n),$$

故 $\pi_{\pm}^{(n)}, n \geqslant 0$，为上鞅. 于是，$\pi_{\pm}^{(\cdot)}$为势.

引理5.3.6 设$\{\xi(t), \mathscr{F}_t, t \in T_\infty\}$为拟鞅. $s_n \in T_\infty, n \geqslant 1$，且 $s_n \downarrow$. 则 $\xi(s_n), n \geqslant 1$，一致可积.

证 让 $\psi(s,t) = \xi(s) - E(\xi(t)|\mathscr{F}_s) \quad (s,t \in T_\infty, s < t)$，则

$$\xi(s_n) = E(\xi(s_1) + \sum_{i=1}^{n-1}\psi(s_{i+1}, s_i)|\mathscr{F}_{s_n}).$$

令 $\gamma = |\xi(s_1)| + \sum_{i=1}^{\infty}|\psi(s_{i+1}, s_i)|$，则

$$E\gamma \leqslant \|V\| + E|\xi(s_1)| < \infty,$$

于是，$\gamma \in L_1$. 利用 Jensen 不等式可得

$$|\xi(s_n)| \leqslant E(\gamma|\mathscr{F}_{s_n}) \quad (n \geqslant 1),$$

故由引理5.2.1和5.2.2，$\xi(s_n)$，$n\geqslant 1$，一致可积. #

定理5.3.3 若拟势$\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$右连左极，则它可以分解成两势之差，即

$$\zeta(t)=\pi_+(t)-\pi_-(t)\quad(t\in T_\infty),$$

其中 $\pi_\pm(t)$，$t\in T_\infty$，为势.

证 让 $\psi(s,t)$ 由(5.3.1)定义. 按引理5.3.5，离散拟势$\{\zeta(\frac{k}{2^n}),\mathscr{F}\frac{k}{2^n},k\geqslant 0\}$可分解为

$$\zeta(\frac{k}{2^n})=\pi_+^{(k)}(n)-\pi_-^{(k)}(n)\quad(k\geqslant 0),\qquad(5.3.13)$$

其中，$n\geqslant 1$，$\pi_\pm^{(k)}(n)$，$k\geqslant 0$，为势，且

$$\pi_\pm^{(k)}(n)=E(\rho_k^{(\pm)}(n)\,|\,\mathscr{F}\frac{k}{2^n}),$$

$$\rho_k^{(\pm)}(n)=\sum_{i=k}^{\infty}\psi^\pm(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n})\quad(k\geqslant 0).\qquad(5.3.14)$$

注意，对$\forall\ t\in T_\infty$及 $n\geqslant 1$，$\exists\ k_n=k(t)$，使$\frac{k_n-1}{2^n}<t\leqslant\frac{k_n}{2^n}$.

那么，由(5.3.13)可得

$$\zeta_n(t)=E(\zeta(\frac{k_n}{2^n})\,|\,\mathscr{F}_t)=\pi_n^{(+)}(t)-\pi_n^{(-)}(t)\quad(n\geqslant 1),\ (5.3.15)$$

其中，$\pi_n^{(\pm)}(t)=E(\rho_{k_n}^{(\pm)}(n)\,|\,\mathscr{F}_t)$.

对固定的 t，当 $n\uparrow\infty$时，$s_n=\frac{k_n}{2^n}\downarrow t$. 那么，按引理5.3.6，随机列 $\zeta(s_n)$，$n\geqslant 1$，一致可积. 由 $\zeta(\cdot)$的右连续性，有$\zeta(s_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.c}}\zeta(t)$.

利用 Lebesque 收敛定理，有

当 $n\to\infty$时，$\zeta(s_n)\xrightarrow{L_1}\zeta(t)$.

从而，a.c-$\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n(t)=E(\lim\limits_{n\to\infty}\zeta(s_n)\,|\,\mathscr{F}_t)=\zeta(t)$. 于是，在(5.3.15)式两边求极限，可得

$$\zeta(t)=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}(\pi_n^{(+)}(t)-\pi_n^{(-)}(t))\quad(t\in T_\infty).\quad(5.3.16)$$

假如下述命题(A)成立.

"命题(A)　$\pi'_{\pm}(t)=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n^{(\pm)}(t)$存在，且为非负上鞅，"

则因当$t\uparrow\infty$时，$E\pi'_{\pm}(t)\downarrow$，而有

$$a_{\pm}=\lim_{t\to\infty}E\pi'_{\pm}(t)\geqslant 0.$$

令　$\pi_{\pm}(t)=\pi'_{\pm}(t)-a_{\pm}$　$(\forall\ t\in T_{\infty})$，那么$\pi_{\pm}(t),t\in T_{\infty}$，为势，且$\zeta(t)=\pi_{+}(t)-\pi_{-}(t)$　$(t\in T_{\infty})$. 这正是所要的结论.

往下，将分三步证明"命题(A)."

第一步. $\pi_n^{(\pm)}(t)$关于$n\geqslant 1$是单调不降的. 从而，下列极限存在：$\pi'_{\pm}(t)=\text{a.c-}\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n^{(\pm)}(t)$　$(t\in T_{\infty})$.

对$\forall\ i\geqslant k_n$，有

$$\begin{aligned}E(\psi^{\pm}(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n})|\mathscr{F}_t)&=E([\psi(\frac{2i}{2^{n+1}},\frac{2i+1}{2^{n+1}})\\&\quad+E(\psi(\frac{2i+1}{2^{n+1}},\frac{2(i+1)}{2^{n+1}})|\mathscr{F}_{\frac{2i}{2^{n+1}}})]^{\pm}|\mathscr{F}_t)\\&\leqslant E(\psi^{\pm}(\frac{2i}{2^{n+1}},\frac{2i+1}{2^{n+1}})+\psi^{\pm}(\frac{2i+1}{2^{n+1}},\frac{2(i+1)}{2^{n+1}})|\mathscr{F}_t),\end{aligned}$$

于是，$$E(\rho_{k_n}^{(\pm)}(n)|\mathscr{F}_t)\leqslant E(\rho_{2k_n}^{(\pm)}(n+1)|\mathscr{F}_t).\tag{5.3.17}$$

注意：$k_n=k(t)$，且$\exists\ k_{n+1}=k'(t)$，使得

$$\frac{k_{n+1}-1}{2^{n+1}}<t\leqslant\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}\leqslant\frac{2k_n}{2^{n+1}},$$

即$k_{n+1}\leqslant 2k_n$，故

$$\rho_{2k_n}^{(\pm)}(n+1)\leqslant\rho_{k_{n+1}}^{(\pm)}(n+1).\tag{5.3.18}$$

将(5.3.17)式和(5.3.18)式联合起来，即可得

$\pi_n^{(\pm)}(t)=E(\rho_{k_n}^{(\pm)}(n)|\mathscr{F}_t)\leqslant E(\rho_{k_{n+1}}^{(\pm)}(n+1)|\mathscr{F}_t)=\pi_{n+1}^{(\pm)}(t)$.

第二步. 证明：$\pi'_{\pm}(t)\in L_1$　$(t\in T_{\infty})$.

对$\forall\ t\in T_{\infty}$，$E\pi_n^{(\pm)}(t)=E\rho_{k_n}^{(\pm)}(n)\leqslant\|V\|<\infty$.

从而，由第一步的结果及 Fatou 引理可知：$\pi'_{\pm}(t)\in L_1$.

第三步. 证明：$\pi'_{\pm}(t),t\in T_{\infty}$，为非负上鞅.

显然，$\pi'_{\pm}(t)$非负且$\mathscr{F}_t$-可测. 让$s,t\in T_{\infty}$，且$s>t$. 则$\exists\ k'_n=k(s),k''_n=k(t)$，使得

$$\frac{k_n'-1}{2^n}<s\leqslant\frac{k_n'}{2^n},\quad \frac{k_n''-1}{2^n}<t\leqslant\frac{k_n''}{2^n}.$$

显然，$k_n'\leqslant k_n''$. 从而，$\rho_{k_n'}^{(\pm)}(n)\geqslant\rho_{k_n''}^{(\pm)}(n)$. 因此

$$E(\pi_n^{(\pm)}(t)\mid\mathscr{F}_s)=E(\rho_{k_n''}^{(\pm)}(n)\mid\mathscr{F}_s)\leqslant E(\rho_{k_n'}^{(\pm)}(n)\mid\mathscr{F}_s)$$
$$=\pi_n^{(\pm)}(s),$$

故对 $\forall\ n\geqslant1$，$\pi_n^{(\pm)}(\cdot)$ 为上鞅. 利用 Fatou 引理，最后推得：$E(\pi_\pm'(t)\mid\mathscr{F}_s)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}E(\pi_n^{(\pm)}(t)\mid\mathscr{F}_s)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n^{(\pm)}(s)=\pi_\pm'(s)$.

注 定理5.3.3中的分解是不唯一的. 例如，设

$$\tilde{\pi}_1=\pi_+(t)+\pi_-(t),\ \tilde{\pi}_2(t)=2\cdot\pi_-(t),$$

则 $\zeta(t)=\tilde{\pi}_1(t)-\tilde{\pi}_2(t)$. 显然，$\tilde{\pi}_i(t)$，$i=1,2$，满足定理中的要求.

定理5.3.2和5.3.3表明：右连左极的拟鞅可以分解成鞅与势的线性组合. 因此，拟鞅问题可以转化成研究鞅与势的问题.

§4 Doob-Meyer 定理

从上一节的讨论中可以看出：势的研究是鞅分析中的基本问题之一. 本节的主要结论是 Doob-Meyer 定理. 我们将假定：$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+1}$，$t\in T_\infty$，即 σ-代数流 $\mathscr{F}$ 是右连续的. 有的涉及到的过程和变量均定义在完全概念空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上.

定义5.4.1 设 $\mathscr{T}=\{\tau:\tau$ 为有限$\{\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$-时$\}$，

$$\mathscr{T}_a=\{\tau:\tau\in\mathscr{T}，且\ P(\tau\leqslant a)=1\}\quad(a\in T_\infty).$$

如果随机过程$\{\xi(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$满足条件：

$(A.1)$样本函数以概率1右连左极（即右连续、左极限存在），则称此过程为右连续过程.

此外，若还满足：

$(A.2)\ \xi(\tau)$，$\tau\in\mathscr{T}$，一致可积.

则称此过程属于类$[D]$.

如果代替$(A.2)$以如下条件：

$(A.2)'\ \xi(\tau)$，$\tau\in\mathscr{T}_a$，一致可积，$(\forall\ a\in T_\infty)$，

则称此过程属于类$[DL]$.

注 类$[D]$中的元素也称为完全一致可积过程. 显然,$[DL]\supset[D]$下面的例表明:类$[DL]$确实比类$[D]$要广.

例5.4.1 设$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为例4.4.1中所给定的鞅. 定义:$\zeta(t)=\zeta_n$,当$n\leqslant t<n+1,n=0,1,2,\cdots$时;$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_n$,当$n\leqslant t<n+1,n=0,1,\cdots$时. $\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$为一右连续鞅. 以后,称这类过程为简单右连续过程. 不难验证:$\zeta(\cdot)\in[DL]$. 但$\zeta(\cdot)\notin[D]$,因为$\zeta_n,n\geqslant 1$,不一致可积.

定理5.4.1 类$[D]$包含下列元素:右闭鞅,受右闭鞅上、下控制的右连续过程、简单右连续势.

证 设$\xi(\cdot)$为右闭鞅,则$\exists\ \eta\in L_1$,使得

$$\xi(t)=E(\eta|\mathscr{F}_t),t\in T_\infty.$$

注意到$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$及推论5.1.1,$\xi(\cdot)$为右连续过程. 按此定理5.2.2,$\xi(\tau)=E(\eta|\mathscr{F}_\tau)\quad(\forall\ \tau\in\mathscr{T})$. 令

$$A_\lambda=\{|\xi(\tau)|\geqslant\lambda\}\in\mathscr{F}_\tau\quad(\forall\ \lambda>0),$$

则由 Jensen 不等式,有

$$\int_{A_\lambda}|\xi(\tau)|\mathrm{d}P\leqslant\int_{A_\lambda}E(|\eta||\mathscr{F}_\tau)\mathrm{d}P=\int_{A_\lambda}|\eta|\mathrm{d}P.$$

$$P(A_\lambda)\leqslant\frac{E|\xi(\tau)|}{\lambda}\leqslant\frac{E|\eta|}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0\text{关于}\tau\in\mathscr{T}\text{一致成立}$$

故
$$\sup_\tau\int_{A_\lambda}|\xi(\tau)|\mathrm{d}P\leqslant\sup_\tau\int_{A_\lambda}|\eta|\mathrm{d}P\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0.$$

此式表明:$\xi(\tau),\tau\in\mathscr{T}$,一致可积,即$\xi(\cdot)\in[D]$.

现假定右连续过程$\xi(\cdot)$满足如下条件:

$$\eta_1(t)\leqslant\xi(t)\leqslant\eta_2(t),t\in T_\infty,$$

其中,$\eta_i(\cdot),i=1,2$,均为右闭鞅. 这个事实表明:$\exists\ \eta_i\in L_1$,$\ni\eta_i(t)=E(\eta_i|\mathscr{F}_t),t\in T_\infty,i=1,2$. 按推论3.3.1,$\xi(\tau)$是$\mathscr{F}_\tau$-可测的. 由推论3.2.2可知

$$E(\eta_1|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\xi(\tau)\leqslant E(\eta_2|\mathscr{F}_\tau).$$

由此不等式并仿此前一段的证明过程即知:$\xi(\cdot)\in[D]$.

最后，假定 $\xi(\cdot)$ 为简单右连续势，即$\exists$ 离散势$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$，$\ni \xi(t)=\xi_n$，当 $n\leqslant t<n+1,n=0,1,2,\cdots$时. 按此定理4.5.2 (Doob 分解)，$\exists$ 一致可积的增序列 $\alpha_n,n\geqslant 0$，使得 $\xi_n=E(\alpha_\infty|\mathscr{F}_n)-\alpha_n,n\geqslant 0$. 那么，对于$\forall\ \tau\in\mathscr{T}$，有

当 $n\geqslant 0$，且 $\omega\in(n\leqslant\tau<n+1)$时，$\xi(\tau)=E(\alpha_\infty|\mathscr{F}_n)-\alpha_n$.
定义：当 $n\leqslant t<n+1,n\geqslant 0$时. $\eta(t)=E(\alpha_\infty|\mathscr{F}_n),\alpha(t)=\alpha_n$.
显然，$\alpha(\cdot)\in[D]$. 又 $\eta(\cdot)\in[D]$. 而 $\xi(t)=\eta(t)-\alpha(t)$，从而有 $\xi(\cdot)\in[D]$. #

定义5.4.2 如果随机过程$\{\alpha(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$满足下列条件：

$(N.1)$过程的样本函数以概率1右连续；

$(N.2)\alpha(0)=0;\alpha(s)\leqslant\alpha(t)$对$\forall\ s,t\in T_\infty,s\leqslant t$，成立.
则称此过程为增过程；若还满足条件

$$(N.3)\text{a.c-}\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=\alpha(\infty)\in L_1,$$

则称此过程为可积增过程；若还满足条件

$(N.4)$对任意非负的右连续有界鞅$\{\eta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$，

有
$$E\left(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty)),\qquad(5.4.1)$$

其中 $\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=0}^\infty\eta(s_i)\cdot(\alpha(s_{i+1})-\alpha(s_i)),s_i=i\cdot\lambda,i=0,1,2,\cdots$ 则称此过程为可料可积增过程.

引理5.4.1 可积增过程 $\alpha(\cdot)$必属于类$[D]$.

证 按上述定义，$\exists\ \alpha(\infty)\in L_1$，使得

$$0\leqslant\alpha(t)=E(\alpha(t)|\mathscr{F}_t)\leqslant E(\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t),t\in T_\infty.$$

应用定理5.4.1，就可得此结论.

推论5.4.1 若右连续过程 $\xi(\cdot)$可表写为

$$\xi(t)=\eta(t)-\alpha(t),t\in T_\infty,$$

其中 $\eta(\cdot)$为右闭鞅；$\alpha(\cdot)$为可料可积增过程，则 $\xi(\cdot)\in[D]$.

证 定理5.4.1及引理5.4.1蕴含着此结论. #

现在，来考虑此结论之逆是否成立的问题. 为此，需要弱列紧

的概念. 尽管这在任何一本普通的泛函分析书中都可找到. 但为方便计，还是将它们列述如下.

定义5.4.3 假设 ξ、$\xi_n \in L_1, n \geqslant 1$，且对$\forall$ 有界的 r.v. η，有

$$\lim_{n\to\infty} E(\eta \cdot \xi_n) = E(\eta \cdot \xi),$$

则称 $\xi_n, n \geqslant 1$，弱收敛到 ξ. 记为 $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{W} \xi$ 或 $W\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. 如果变量族 $\xi_\alpha, \alpha \in \mathscr{U}$，中任意无穷序列都可选出一子序列弱收敛，则称变量族弱列紧.

引理5.4.2(Dunford-Pettis 列紧判据) 可积变量族 $\xi_\alpha, \alpha \in \mathscr{U}$，弱列紧的充要条件是：该变量族一致可积.

这个定理的证明可参考文献[16].

定理5.4.2 设 $N = \{0, 1, 2 \cdots\}$；Z 为一参数集；$\{\xi_n^{(z)}, \mathscr{F}_n^{(z)}, n \in N\}, z \in Z$，为一势族；$\alpha_n^{(z)}, n \in N$，为与 $\xi_n^{(z)}, n \in N$，相联的过程；$\mathscr{T}^{(z)}$ 为有限$\{\mathscr{F}_n^{(z)}, n \in N\}$-时类. 若

$$\sup_z \sup_{\tau \in \mathscr{T}^{(z)}} \int_{(\xi_\tau^{(z)} \geqslant c)} \xi_\tau^{(z)} \mathrm{d}P = \rho(c) < \infty, \tag{5.4.2}$$

其中，当 $c \uparrow \infty$ 时，$\rho(c) \downarrow 0$，则随机变量族 $\alpha_\infty^{(z)}, z \in Z$，一致可积.

证 为书写方便计，略去上标 z，按定理4.5.2，有

$$\xi_n = E(\alpha_\infty | \mathscr{F}_n) - \alpha_n \quad (\forall\ n \in N). \tag{5.4.3}$$

定义停时：$\tau_\lambda = \inf\{n : \alpha_{n+1} > \lambda\}$，$\inf \varnothing = \infty$. 注意：$\alpha_{n+1}$是 $\mathscr{F}_n$-可测的(可料性)，而有 $(\tau_\lambda = n) \in \mathscr{F}_n$，且 $\alpha_{\tau_\lambda} \leqslant \lambda$. 不妨假定：$\alpha_n, n \in N$，的所有样本都是单调不降的. 从而，$\Omega_\lambda = (\tau_\lambda < \infty) = \{\alpha_\infty > \lambda\}$. 故(5.4.3)式两边乘以 $\chi_\lambda = \chi_{\Omega_\lambda}$ 然后以 τ_λ 代替 n，则得

$$\chi_\lambda \cdot \xi_{\tau_\lambda} = E(\chi_\lambda \cdot \alpha_\infty | \mathscr{F}_{\tau_\lambda}) - \chi_\lambda \cdot \alpha_{\tau_\lambda}. \tag{5.4.4}$$

这里用到 χ_λ 是 $\mathscr{F}_{\tau_\lambda}$-可测的这一事实. 那么，利用公式(5.4.4)，就可推出

$$E(\chi_\lambda \cdot \alpha_\infty) \leqslant E(\chi_\lambda \cdot \xi_{\tau_\lambda}) + \lambda \cdot P(\Omega_\lambda),$$

$$E(\chi_{2\lambda} \cdot \alpha_\infty) \leqslant E(\chi_{2\lambda} \cdot \xi_{\tau_{2\lambda}}) + 2\lambda \cdot P(\Omega_{2\lambda}).$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot P(\Omega_{2\lambda}) \leqslant E(\chi_{2\lambda} \cdot (\alpha_\infty - \lambda)) \leqslant E(\chi_\lambda \cdot (\alpha_\infty - \lambda))$$

$$\leqslant E(\chi_\lambda\cdot\xi_{\tau_\lambda})=E[\chi_\lambda\cdot\chi_{\{\xi_{\tau_\lambda}\geqslant c\}}\cdot\xi_{\tau_\lambda}]+E[\chi_\tau\chi_{\{\xi_{\tau_\lambda}<c\}}\cdot\xi_{\tau_\lambda}]$$
$$\leqslant\rho(C)+C\cdot P(\Omega_\lambda).$$
$$E(\chi_{2\lambda}\cdot\xi_{\tau_{2\lambda}})\leqslant\rho(C)+C\cdot P(\Omega_{2\lambda}).$$
$$\Rightarrow E(\chi_{2\lambda}\cdot\alpha_\infty)\leqslant 3\cdot\rho(C)+C\cdot(P(\Omega_{2\lambda})+2\cdot P(\Omega_\lambda)).\qquad(5.4.5)$$

由(5.4.3)式可知：$E\alpha_\infty=E\xi_0$. 于是，$P(\Omega_\lambda)\leqslant\frac{E\xi_0}{\lambda}$，$P(\Omega_{2\lambda})\leqslant\frac{E\xi_0}{2\lambda}$. 将这些估计代入(5.4.5)式中即得

$$E(\chi_{2\lambda}\cdot\alpha_\infty)\leqslant 3\cdot P(C)+C\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{E\xi_0}{\lambda}.$$

现取 $C=\sqrt{\lambda}$，则有

$$\text{当 }\lambda\to\infty\text{ 时，}E(\chi_{2\lambda}\cdot\alpha_\infty)\leqslant 3\cdot\rho(\sqrt{\lambda})+\frac{5}{2}E\xi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\to 0.$$

故 $\sup_z\int_{\alpha_\infty^{(z)}>\lambda}\alpha_\infty^{(z)}\mathrm{d}P\leqslant 3\cdot\rho(\sqrt{\frac{\lambda}{2}})+\frac{5}{\sqrt{2}}E\xi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}0.$

此式表明：$\alpha_\infty^{(z)}$，$z\in Z$，是一致可积的. #

定理5.4.3(Doob-Meyer 分解) 若右连续势 $\zeta(t)$，$t\in T_\infty$，属于类$[D]$，则存在唯一的可料可积增过程 $a(t)$，$t\in T_\infty$，使得

$$\zeta(t)=E(a(\infty)\,|\,\mathscr{F}_t)-a(t),\ t\in T_\infty.\qquad(5.4.6)$$

证 记 $N=\{0,1,2,\cdots\}$. $\zeta_i^{(n)}=\zeta(r_i)$，其中 $r_i=\frac{i}{2^n}$，$i\in N$，$n\in N$. 则 $\zeta_\cdot^{(n)}$，$n\in N$，为类$[D]$中的一个势族. 按定理4.5.2，对$\forall\ n\in N$，$\exists$ 离散的可料可积增过程$\{\alpha_i^{(n)},\mathscr{F}_i^{(n)},i\in N\}$，使得

$$\zeta_i^{(n)}=E(\alpha_\infty^{(n)}\,|\,\mathscr{F}_i^{(n)})-\alpha_i^{(n)}\quad(i\in N),\qquad(5.4.7)$$

其中 $\mathscr{F}_i^{(n)}=\mathscr{F}_{r_i}$.

$\zeta(\cdot)\in[D]$表明：$\zeta_\cdot^{(n)}$，$n\in N$，满足引理5.4.2的条件. 于是，$\alpha_\infty^{(n)}$，$n\in N$，一致可积. 按定理5.4.2，$\alpha_\infty^{(n)}$，$n\in N$，弱列紧.

在以下讨论中，固定 $t\in T_\infty$. 那么，对$\forall\ n\in N$，$\exists\ k_n=k(t)$，$\ni$ $\frac{k_n-1}{2^n}<t\leqslant\frac{k_n}{2^n}=s_n$. 显然，当 $n\uparrow\infty$ 时，$s_n\downarrow t$. 按引理5.1.1，有 $\zeta_{k_n}^{(n)}=\zeta(s_n)$，$n\in N$，一致可积. 从而弱列紧.

从上面的分析中可以看出：能从 N 中选出一个子列 $n_j, j\geqslant 1$，使得当 $j\uparrow\infty$时，$n_j\uparrow\infty$，且

$$W\text{-}\lim_{j\to\infty}\alpha_\infty^{(n_j)}=\alpha(\infty),W\text{-}\lim_{j\to\infty}\zeta_{k_{n_j}}^{(n_j)}=W\text{-}\lim_{j\to\infty}\zeta(s_{n_j})=\zeta(t)$$

$$\Rightarrow W\text{-}\lim_{j\to\infty}E(\alpha_\infty^{(n_j)}\mid\mathscr{F}_t)=E(\alpha(\infty)\mid\mathscr{F}_t). \tag{5.4.8}$$

$$W\text{-}\lim_{j\to\infty}E(\zeta_{k_{n_j}}^{(n_j)}\mid\mathscr{F}_t)=\zeta(t). \tag{5.4.9}$$

现在，令 $\mu(t)=E(\alpha(\infty)\mid\mathscr{F}_t)$，$\alpha(t)=\mu(t)-\zeta(t)$，则 $\alpha(\cdot)$具有下列性质：

性质1 $W\text{-}\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_{k_j'}^{(n_j)}=\alpha(t)$，其中 $k_j'=k_{n_j}$. 事实上，(5.4.7)～(5.4.9)式表明：$W\text{-}\lim\limits_{j\to\infty}E(\alpha_{k_j'}^{(n_j)}\mid\mathscr{F}_t)=\alpha(t)$.

注意：$\frac{k_j'-1}{2^{n_j}}<t\leqslant\frac{k_j'}{2^{n_j}}(k_j'=k_{n_j}(t))$. 而 $\alpha_{k_j'}^{(n_j)}$是 $\mathscr{F}_{k_j'-1}^{(n_j)}$-可测的，因此，它更是 $\mathscr{F}_t$-可测的，故

$$E(\alpha_{k_j'}^{(n_j)}\mid\mathscr{F}_t)=\alpha_{k_j'}^{(n_j)}.$$

性质2 $\alpha(0)=0$，且 $\alpha(r')\leqslant\alpha(r'')$，其中 $r'\leqslant r''$，r'、r''为二进制有理数.

事实上，r'，r''为二进制有理数等价于：$\exists\ j_0\geqslant 1$，使得

当 $j\geqslant j_0$时，$\frac{\bar{k}_j'-1}{2^{n_j}}<r'\leqslant\frac{\bar{k}_j'}{2^{n_j}},\frac{\bar{k}_j''-1}{2^{n_j}}<r''\leqslant\frac{\bar{k}_j''}{2^{n_j}},r'\leqslant r''\Rightarrow\bar{k}_j'\leqslant\bar{k}_j''$，

故 $\alpha_{\bar{k}_j'}^{(n_j)}\leqslant\alpha_{\bar{k}_j''}^{(n_j)}$ $(j\geqslant j_0)$，那么，在性质1中，分别让 t 取 r'，r''，即可得出：$\alpha(r')\leqslant\alpha(r'')$.

性质3 $\alpha(\cdot)$右连续，且当 $t\uparrow\infty$时，$\alpha(t)\uparrow\alpha(\infty)$.

事实上，$\mathscr{F}_t$，$t\in T_\infty$，右连续即知：$\eta(\cdot)$为右连续鞅. 再考虑到 $\zeta(\cdot)$的右连续性就可得到结论：$\alpha(\cdot)$右连续. 关于 $\alpha(\cdot)$的单调性可利用二进制有理数的稠密性及性质2推出. 下面证明：$\alpha(t)\uparrow\alpha(\infty)$. 让

$$\alpha'(\infty)=\text{a. c-}\lim_{t\to\infty}\alpha(t).$$

按引理5.3.4，a. c-$\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=0$. 对$\forall\ t_i\in T_\infty$，$t_i\uparrow\infty$当 $i\uparrow\infty$时，按定理4.4.2，$\alpha(\infty)=$a. c. -$\lim\limits_{i\to\infty}\mu(t_i)$，故

$$\alpha'(\infty)=\text{a.c-}\lim_{i\to\infty}\alpha(t_i)=\text{a.c-}\lim_{i\to\infty}\mu(t_i)\text{-a.c-}\lim_{i\to\infty}\zeta(t_j)=\alpha(\infty).$$

性质4 $\alpha(\cdot)$为可料过程.

事实上,设$\eta(\cdot)$为任意有界鞅. 令$r_i^{(n)}=\frac{i}{2^n}$,则利用性质3和Lebesque 控制收敛定理就能得到

$$\begin{aligned}E(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(r_i^{(n)})\cdot(\alpha(r_{i+1}^{(n)})-\alpha(r_i^{(n)}))]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(r_i^{(n)})\cdot(\zeta(r_i^{(n)})-\zeta(r_{i+1}^{(n)}))]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(r_i^{(n)})\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(r_{i+1}^{(n)})\cdot\alpha_{i+1}^{(n)}-\eta(r_i^{(n)}\cdot\alpha_i^{(n)})]\\ &= \lim_{j\to\infty}E(\alpha_\infty^{n_j}\cdot\eta(\infty))\\ &= E(\alpha(\infty)\cdot\eta(\infty)).\end{aligned}$$

综上分析,可得结论:$\alpha(\cdot)$为可料可积增过程.

最后,证明唯一性.

假定有两个可料可积增过程$\alpha'(t),\alpha''(t)\quad(t\in T_\infty)$,使得
$E(\alpha'(\infty)|\mathscr{F}_t)-\alpha'(t)=\zeta(t)=E(\alpha''(\infty)|\mathscr{F}_t)-\alpha''(t),(t\in T_\infty)$.
让$\eta(\cdot)$为任意右连续有界鞅,则由 Lebesque 控制收敛定理,有

$$\begin{aligned}E(\int_0^\infty\eta(t_-)\mathrm{d}\alpha'(t)) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(\frac{i}{2^n})\cdot(\alpha'(\frac{i+1}{2^n})-\alpha'(\frac{i}{2^n}))]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E[\eta(\frac{i}{2^n})\cdot(\alpha'(\frac{i+1}{2^n})-\alpha'(\frac{i}{2^n}))]\\ &= E(\int_0^\infty\eta(t_-)\mathrm{d}\alpha''(t))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(\eta(\infty)\cdot\alpha'(\infty))=E(\eta(\infty)\cdot\alpha''(\infty)).$$

此式中的$\eta(\infty)$为任意有界的 r.v.,故由此得到

$$\alpha'(\infty)=\alpha''(\infty)\quad(\text{a.c}).$$

从而可推出:$\alpha'(t)=\alpha''(t)\quad(\text{a.c})\quad(\forall\ t\in T_\infty)$.

推论5.4.2 如果上鞅$\xi(\cdot)\in[D]$,则此上鞅可唯一地分解为

$$\xi(t)=\eta(t)-\alpha(t), t\in T_\infty,$$

其中 $\eta(\cdot)$为右闭鞅；$\alpha(\cdot)$为可料可积增过程.

证 推论5.3.1与上述定理联合起来即得此结论.

§5 可料可积增过程

按此 Doob-Meyer 定理，类[D]中的任一势均可通过一个可料可积增过程表示出来. 由此可见，讨论这类特别的过程是很有意义的. 本节将用符号 $\mathscr{F}_t, t\in T_\infty$，表示右连续 σ-代数流，而 $\mathscr{F}_{t-}, t\in T_\infty$，表示左连续 σ-代数流. 它们的定义在本章开始时已作说明.

引理5.5.1 右连续可积增过程 $\alpha(\cdot)$是可料的充要条件为：对任意右连续非负有界鞅 $\eta(\cdot)$，有

$$E\left(\int_0^\infty \eta(s)\mathrm{d}\alpha(s)\right) = E\left(\int_0^\infty \eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right). \tag{5.5.1}$$

证 在定义5.4.2的条件$(N.4)$中的 $\eta(\cdot)$可用非负有界鞅代替. 事实上，$\eta(\cdot)$有界表明：∃ 实数 $k>0$，使 $|\eta(t)|\leqslant k \quad (t\in T_\infty)$. 令 $\bar\eta(t)=k-\eta(t)$，则 $\bar\eta(\cdot)$为非负有界鞅. 将 $\eta(t)=k-\bar\eta(t)$代入(5.4.1)式，即知条件$(N.4)$可改为

$(N.4)'$ 对任意非负有界央 $\eta(\cdot)$，$E\left(\int_0^\infty \eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right) = E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty))$. 因此，(5.5.1)式成立等价于

$$E\left(\int_0^\infty \eta(s)\mathrm{d}\alpha(s)\right) = E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty)). \tag{5.5.2}$$

应用 Lebesque 控制收敛定理，下述推导过程是合理的：

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^\infty \eta(s)\mathrm{d}\alpha(s)\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E\left[\eta\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\cdot\left(\alpha\left(\frac{i+1}{2^n}\right)-\alpha\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty \left[E\left(\eta\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\cdot\alpha\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - E\left(\eta\left(\frac{i}{2^n}\right)\cdot\alpha\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)\right] \\
&= E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty)).
\end{aligned}$$

引理5.5.2 右连续可积增过程 $\alpha(\cdot)$ 是可料的充要条件为

$$E\left(\int_{[0,\tau]}\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=E(\eta(\tau)\cdot\alpha(\tau)),\qquad(5.5.3)$$

其中，τ 为任意 $\mathscr{F}_\cdot$-时；$\eta(\cdot)$ 为任意非负有界鞅.

证 令

$$\bar{\eta}(t)=\eta(t)\cdot\chi_{(t\leqslant\tau)}+\eta(\tau)\cdot\chi_{(t>\tau)}=\eta(t\wedge\tau),t\in T_\infty,$$

则 $\bar{\eta}(\cdot)$ 亦为右连续有界鞅，因此

$$I\triangleq E\left(\int_0^\infty\bar{\eta}(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=E(\bar{\eta}(\infty)\cdot\alpha(\infty))=E(\eta(\tau)\cdot\alpha(\infty)).$$

另一方面

$$\begin{aligned}I&=E\left(\int_{[0,\tau]}\bar{\eta}(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)+E\left(\int_{(\tau,\infty)}\bar{\eta}(\eta_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)\\&=E\left(\int_{[0,\tau]}\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)+E[\eta(\tau)\cdot(\alpha(\infty)-\alpha(\tau))]\\&\Rightarrow I=I+E\left(\int_{[0,\tau]}\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)-E(\eta(\tau)\cdot\alpha(\tau))\\&\Rightarrow(5.5.3)\text{式成立.}\end{aligned}$$

上面证明了条件(5.5.3)式的必要性、充分性是显然的，因为 $\tau=\infty$ (a.c)，就是一个 $\mathscr{F}_\cdot$-时. #

引理5.5.3 右连续可积增过程 $\alpha(\cdot)$ 是可料的充要条件是

$$E\left(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=E\left(\int_0^\infty\eta(s)\mathrm{d}\alpha(s)\right),\qquad(5.5.4)$$

其中，$\eta(\cdot)$ 为任意右连续非负右闭鞅.

证 $\eta(\cdot)$ 右闭表明：$\exists\ \eta(\infty)\in L_1$，使得

$$\eta(t)=E(\eta(\infty)|\mathscr{F}_t)\quad(t\in T_\infty)).$$

对 $\forall\ n\geqslant1$，令 $\eta_n(\infty)=\eta(\infty)\wedge n$，则 $\eta_n(t)=E(\eta_n(\infty)|\mathscr{F}_t)$，$t\in T_\infty$，为右连续非负有界鞅. 于是，按引理5.5.1，有

$$E\left(\int_0^\infty\eta_n(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)\right)=E\left(\int_0^\infty\eta_n(s)\mathrm{d}\alpha(s)\right).\qquad(5.5.5)$$

注意到上式两边关于 $n\geqslant1$ 是单调不减的. 从而两边都有极限存在(极限可以是“∞”). 然后，利用单调收敛定理即可由(5.5.5)式产生(5.5.4)式. 这就证明了条件(5.5.4)式的必要性. 充分性是显然的.

推论5.5.1 设 $\alpha(\cdot)$ 为右连续可积增过程. τ 为 $\mathscr{F}$.-时. 让 $\bar{\alpha}(t)=\alpha(t\wedge\tau),t\in T_\infty$，则 $\bar{\alpha}(\cdot)$ 亦为可料可积增过程.

证 假定 $\eta(\cdot)$ 为任意非负有界鞅. 那么，按引理5.5.2，有

$$
\begin{aligned}
E(\eta(\infty)\cdot\bar{\alpha}(\infty)) &= E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\tau)) \\
&= E(\alpha(\tau)\cdot E(\eta(\infty)\,|\,\mathscr{F}_\tau)) \\
&= E(\alpha(\tau)\cdot\eta(\tau)) = E(\int_{[0,\tau]}\eta(s_-)\mathrm{d}\alpha(s)) \\
&= E(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\bar{\alpha}(s)),
\end{aligned}
$$

于是，$\bar{\alpha}(\cdot)$ 服从定义5.4.2的条件.

引理5.5.4 设 $\alpha(\cdot)$ 为右连续可料可积增过程. 让 $\beta(t)=\alpha(t)\wedge r\quad(t\in T_\infty)$，其中 r 为给定的正实数，则 $\beta(\cdot)$ 亦为右连续可料可积增过程.

证 定义停时：$\tau=\inf\{t:\alpha(t)\geqslant r\}$，$\inf\varnothing=\infty$. 记

$$
t_i^{(n)}=\frac{i}{2^n},i=0,1,2,\cdots,n\geqslant 1,
$$

则

$$
E(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\beta(s))=\lim_{n\to\infty}E[\sum_{i=0}^\infty\eta(t_i^{(n)})\cdot(\beta(t_{i+1}^{(n)})-\beta(t_i^{(n)}))].
$$

注意：对 $\forall\ \omega\in(\tau<\infty)$，$\exists\ k=k(\tau)$，使得 $\tau_n=t_k^{(n)}<\tau\leqslant t_{k+1}^{(n)}$. 对于 $\omega\in(\tau=\infty)$，定义 $\tau_n=\infty$. 那么，τ_n 为 $\{\mathscr{F}_{t_i^{(n)}},i\geqslant 0\}$-时，且 $\tau_n\uparrow\tau$. 对 $\forall\ i\geqslant 0$，有

$$
\beta(t_{i+1}^{(n)})-\beta(t_i^{(n)})=\begin{cases}\alpha(t_{i+1}^{(n)})-\alpha(t_i^{(n)}), & \text{当 }\omega\in(t_{i+1}^{(n)}\leqslant\tau_n)\text{时；}\\ \beta(\tau)-\alpha(t_i^{(n)}), & \text{当 }\omega\in(\tau_n=t_i^{(n)})\text{时；}\\ 0, & \text{当 }\omega\in(\tau_n<t_i^{(n)})\text{时.}\end{cases}
$$

于是，下列各等式是合理的.

$$
\begin{aligned}
E(\int_0^\infty\eta(s_-)\mathrm{d}\beta(s)) &= \lim_{n\to\infty}E[\sum_{i=0}^\infty\eta(t_i^{(n)})\cdot(\beta(t_{i+1}^{(n)})-\beta(t_i^{(n)}))] \\
&= \lim_{n\to\infty}E[\sum_{i=0}^\infty\eta(t_i^{(n)})\cdot(\alpha(t_{i+1}^{(n)})-\alpha(t_i^{(n)}))\cdot\chi_{(t_{i+1}^{(n)}}\leqslant\tau_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=0}^{\infty}\eta(t_i^{(n)})\cdot(\beta(\tau)-\alpha(t_i^{(n)}))\cdot\chi_{(\tau_n=t_i^{(n)})}]\\
&=\lim_{n\to\infty}[E(\eta(\tau_n)\cdot\alpha(\tau_n))+E(\eta(\tau_n)\cdot(\beta(\tau)-\alpha(\tau_n)))]\\
&=\lim_{n\to\infty}E(\eta(\tau_n)\cdot\beta(\tau))=E(\eta(\tau)\cdot\beta(\tau))\\
&=E(\eta(\infty)\cdot\beta(\infty)).
\end{aligned}
$$

其中,$\eta(\cdot)$为任意右连续有界鞅. #

在第四章中,已经知道离散情形的可料可积增过程$\{\alpha_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0\}$具有一个重要的特性:$\alpha_n$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的$(n\geqslant1)$. 对于连续参数情形也有类似的结果.

定理5.5.1 若 $\alpha(\cdot)$为右连续可料可积增过程,则对$\forall\, t\in T_\infty$,$\alpha(t)$是 $\mathscr{F}_{t-}$-可测的.

证 令 $\zeta(t)=E(\alpha(\infty)\,|\,\mathscr{F}_t)-\alpha(t)$,$t\in T_\infty$,则此过程 $\zeta(\cdot)\in[D]$,且为势. 令 $t_i^{(n)}=\dfrac{i}{2^n}$,$i\geqslant0$,则$\{\zeta(t_i^{(n)}),\mathscr{F}_{t_i^{(n)}},i\geqslant0\}$为离散势,且按定理4.5.2,$\exists$ 离散的可料可积增过程 $\alpha^{(n)}$,使得

$$\zeta(t_i^{(n)})=E(\alpha_\infty^{(n)}\,|\,\mathscr{F}_{t_i^{(n)}})-\alpha_i^{(n)},i=0,1,2,\cdots$$

任意固定 $t>0$,必$\exists$ $k_n=k(t)$,

及 $s_n\downarrow t$ 当 $n\uparrow\infty$时. $\ni t_{k_n}^{(n)}<t\leqslant t_{k_n+1}^{(n)}=s_n$.

注意:$\alpha^{(n)}$的可料性表明:$\alpha_{k+1}^{(n)}$是 $\mathscr{F}_{t_k^{(n)}}$-可测的. 而对所有的 $n\geqslant1$,有$t_{k_n}^{(n)}<t$. 因此,$\alpha_{k_n+1}^{(n)}$对一切 $n\geqslant1$都是 $\mathscr{F}_{t-}$-可测的. 仿定理5.4.3之证可知:$\exists$ 当 $j\uparrow\infty$时,子列 $n_j\uparrow\infty$,$\ni$ 当 $j\uparrow\infty$,$\alpha_{k_j'+1}^{(n_j)}\xrightarrow{W}\alpha(t)$,其中 $k_j'=k_{n_j}$.

按此下面的引理5.5.5,弱极限保持可测性不变. 从而,$\alpha(t)$是$\mathscr{F}_{t-}$-可测的.

引理5.5.5 设可积变量列 ξ_n,$n\geqslant1$,弱收敛到可积变量 ξ. $\mathscr{Y}$是 $\mathscr{F}$ 中的一个子 σ-代数. 若每个 ξ_n 都是 $\mathscr{Y}$-可测的,则 ξ 亦是 $\mathscr{Y}$-可测的.

证 按定理5.4.2,$\{\xi_n,n\geqslant1\}$一致可积. 假定 P'是 P 在 $\mathscr{Y}$ 上的限制,则 ξ_n 为概率空间$(\Omega,\mathscr{Y},P')$上的一致可积变量列. 那么,

按同一定理，它是关于 P' 弱列紧的. 从而∃ 子列 $n_j\uparrow\infty$，当 $j\uparrow\infty$ 时，$\xi_{n_j}\xrightarrow{W}\tilde{\xi}\in L_1$. 现在，我们是在概率空间 $(\Omega,\mathscr{Y},P')$ 上考查这些变量. 因此，$\tilde{\xi}$ 是 $\mathscr{Y}$-可测的. 按弱收敛定义，对 $(\Omega,\mathscr{Y},P')$ 上的任意有界变量 $\tilde{\eta}$，有 $\lim\limits_{j\to\infty}E(\tilde{\eta}\cdot\xi_{n_j})=E(\tilde{\eta}\cdot\tilde{\xi})$.

而按假设，对任意 $\mathscr{F}$-可测的有界变量 η，有

$$\lim_{j\to\infty}E(\eta\cdot\xi_{n_j})=E(\eta\cdot\xi).$$

现在，令 $\tilde{\eta}=E(\eta|\mathscr{Y})$，则

$$E(\eta\cdot\xi)=\lim_{j\to\infty}E(\eta\cdot\xi_{n_j})=\lim_{j\to\infty}E(\tilde{\eta}\cdot\xi_{n_j})=E(\tilde{\xi}\cdot\tilde{\eta})=E(\eta\cdot\tilde{\xi}).$$

由 η 的任意性知：$\xi=\tilde{\xi}$ (a. c). 从而，ξ 是 $\mathscr{Y}$-可测的.

§6 正 则 势

假定 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$，$t\in T_\infty$. 定理5.1.1表明：任意右连续上鞅 $\zeta(\cdot)$，其相应地 $m(t)=E\zeta(t)$，$t\in T_\infty$，是右连续的. 仿照引理 5.1.1，对任意非负势 $\zeta(\cdot)\in[D]$，有

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时}，E\zeta(\tau_n)\to E\zeta(\tau). \tag{5.6.1}$$

其中，τ、$\tau_n\in\mathscr{T}$，当 $n\uparrow\infty$ 时，且 $\tau_n\downarrow\tau$. 然而，若 $\tau_n\uparrow\tau$，则一般而论，关系式(5.6.1)不一定成立.

定义5.6.1 设 $\zeta(\cdot)\in[D]$. 若对∀ $\tau_n\in\mathscr{T}$，且 $\tau_n\uparrow\tau(a.s)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}E\zeta(\tau_n)=E\zeta(\tau)$，其中 τ 为有界停时，则称过程 $\zeta(\cdot)$ 是正则的.

引理5.6.1 若 $\alpha(\cdot)$ 为连续可料可积增过程，则其相联过程 $\zeta(\cdot)$ 为正则势.

证 按照 Doob-Meyer 定理，有

$$\zeta(t)=E(\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t)-\alpha(t)，t\in T_\infty.$$

显然，右闭鞅和连续可积增过程是正则的. 由此及上述分解式即得此结论. #

此结论表明：若类[D]中的右连续势的相联过程是连续的，则

此势正则. 反之,正则势的相联过程是否连续呢?为了解决这个问题,需要下列几条引理.

引理5.6.2 若可积变量列 $\xi_n, n\geqslant 1$,弱收敛到 $\xi\in L_1$,且 $\sup\limits_n E\xi_n^2\leqslant C<\infty$,则 $E\xi^2\leqslant C$.

证 按假定对$\forall$ 有界变量 η,有

$$\lim_{n\to\infty}E(\xi_n\cdot\eta)=E(\xi\cdot\eta).$$

令 $\eta_k=\begin{cases}\xi, 如 |\xi|\leqslant k,\\ 0, 如 |\xi|>k (0<k<\infty),\end{cases}$ 则 η_k 为有界的 r. v.

且
$$E\eta_k^2=E(\xi\cdot\eta_k)=\lim_{n\to\infty}E(\xi_n\cdot\eta_k)\leqslant(\sup_n E\xi_n^2\cdot E\eta_k^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant C^{\frac{1}{2}}(E\eta_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$
$$\Rightarrow E\eta_k^2\leqslant C\quad(0<k<\infty).$$

最后,利用 Fatou 引理即可得

$$E\xi^2\leqslant\underline{\lim}_{k\to\infty}E\eta_k^2\leqslant C.$$

引理5.6.3 假定势 $\zeta(\cdot)\in[D]$, $\alpha(\cdot)$为其相联过程,则

$$E\alpha^2(\infty)=E\left(\int_0^\infty(\zeta(t)+\zeta(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)\right).\qquad(5.6.2)$$

证 按 Doob-Meyer 定理,有

$$\zeta(t)=E(\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t)-\alpha(t), t\in T_\infty.$$

首先,设 $E\alpha^2(\infty)<\infty$. 令 $\eta(t)=E(\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t), t\in T_\infty$,则 $\eta(\cdot)$为右连续非负右闭鞅. 因此,按引理5.5.3,有

$$E\left(\int_0^\infty\eta(t_-)\mathrm{d}\alpha(t)\right)=E\left(\int_0^\infty\eta(t)\mathrm{d}\alpha(t)\right).$$

令 $\xi(t)=\eta(t)\cdot\alpha(t), t\in T_\infty$,则 $0\leqslant\xi(t)=E(\alpha(t)\cdot\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t)\leqslant E(\alpha^2(\infty)|\mathscr{F}_t)$.

注意: $E\alpha^2(\infty)<\infty$. 从而, $\xi(\cdot)$一致可积. 又

$$\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty)=\text{a. c-}\lim_{t\to\infty}\xi(t).$$

于是,应用 Lebesque 收敛定理,得

$$E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty))=\lim_{t\to\infty}E(\eta(t)\cdot\alpha(t))$$

$$=\lim_{t\to\infty} E(\alpha(\infty).\alpha(t)) = E\alpha^2(\infty).$$

$$2E\alpha^2(\infty) = 2\cdot E(\eta(\infty)\cdot\alpha(\infty)) = E\int_0^\infty (\eta(t)+\eta(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)$$

$$=E\Big[\int_0^\infty (\zeta(t)+\zeta(t_-))\mathrm{d}\alpha(t) + \int_0^\infty (\alpha(t)+\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)\Big]. \qquad (5.6.3)$$

再注意到

$$E\Big(\int_0^\infty (\alpha(t)+\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^\infty E\Big(\alpha^2\Big(\frac{i+1}{2^n}\Big)-\alpha^2\Big(\frac{i}{2^n}\Big)\Big)=E\alpha^2(\infty).$$

于是,由此及(5.6.3)式就可推出(5.6.2)式.

现在考虑:$E\alpha^2(\infty)=\infty$的情形.这意味着(5.6.2)的右边应为∞.若不然,即

$$E\int_0^\infty (\zeta(t)+\zeta(t_-))\mathrm{d}\alpha(t) < \infty, \qquad (5.6.4)$$

则 $E\alpha^2(\infty)<\infty$必成立.事实上,假定 $\alpha_i^{(n)}, i\geqslant 0$,为与 $\zeta_i^{(n)}=\zeta(\frac{i}{2^n}), i\geqslant 0$,相联的过程,则$\{\alpha_\infty^{(n)}, n\geqslant 1\}$弱列紧.从而,存在子列 $n_j, j\geqslant 1$,使得

当 $j\to\infty$时,$\alpha_\infty^{(n_j)}\xrightarrow{W}\alpha(\infty)$.

若能证明

$$E(\alpha_\infty^{(n)})^2\leqslant C<\infty, \qquad (5.6.5)$$

则按引理5.6.2,可得 $E\alpha^2(\infty)<\infty$.

因此,剩下的问题就是证明(5.6.5)式.

注意到假设(5.6.4)式及$\zeta(\cdot)$非负.必$\exists$ N_0和C,使得

$$E\Big[\sum_{i=0}^\infty \zeta\Big(\frac{i}{2^n}\Big)\cdot\Big(\alpha\Big(\frac{i+1}{2^n}\Big)-\alpha\Big(\frac{i}{2^n}\Big)\Big)\Big]\leqslant C<\infty \quad (\forall\ n\geqslant N_0).$$

从而,对$\forall$ $n\geqslant N_0$,有

$$E[\sum_{i=0}^{\infty}\zeta(\frac{i}{2^n})\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]\leqslant C.$$

利用 $\alpha^{(n)}$ 的可料性可知：下列各式是合理的.

$$E[\sum_{i=0}^{\infty}\zeta(\frac{i+1}{2^n})\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]$$

$$=E[\sum_{i=0}^{\infty}E(\zeta(\frac{i+1}{2^n})|\mathscr{F}_{\frac{i}{2^n}})\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]$$

$$\leqslant E[\sum_{i=0}^{\infty}\zeta(\frac{i}{2^n})\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]\leqslant C\quad(\forall\ n\geqslant N_0).$$

让 $\zeta_r(\frac{i}{2^n})=E(\alpha_\infty^{(n)}\wedge r|\mathscr{F}_{\frac{i}{2^n}})-\alpha_i^{(n)}\wedge r\quad(i\geqslant 0,n\geqslant 1,r>0).$

注意： $\alpha_{i+l}^{(n)}\wedge r-\alpha_i^{(n)}\wedge r\leqslant(\alpha_{i+l}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})\wedge r\quad(l\geqslant 0,i\geqslant 0)$，从而

$$\zeta_r(\frac{i}{2^n})=E(\alpha_\infty^{(n)}\wedge r-\alpha_i^{(n)}\wedge r|\mathscr{F}_{\frac{i}{2^n}})$$

$$\leqslant E((\alpha_\infty^{(n)}-\alpha_i^{(n)})\wedge r/\frac{\mathscr{F}_i}{2_n})\leqslant\zeta(\frac{i}{2^n})$$

$$\Rightarrow E(\alpha_\infty^{(n)}\wedge r)^2$$

$$=E[\sum_{i=0}^{\infty}(\zeta_r(\frac{i+1}{2^n})+\zeta_r(\frac{i}{2^n}))\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}\wedge r-\alpha_i^{(n)}\wedge r)]$$

$$\leqslant E[\sum_{i=0}^{\infty}(\zeta(\frac{i+1}{2^n})+\zeta(\frac{i}{2^n}))\cdot(\alpha_{i+1}^{(n)}-\alpha_i^{(n)})]\leqslant 2C<\infty.$$

通过上式并引用 Fatou 引理，可得

$$E(\alpha_\infty^{(n)})^2\leqslant\varliminf_{r\to\infty}E(\alpha_\infty^{(n)}\wedge r)^2\leqslant 2C.$$

以下目标是找出可料可积增过程 $\alpha(\cdot)$ 的连续性条件. 令

$$\bar{\alpha}^{(2)}\triangleq E\int_0^{\infty}(\alpha(t)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t),\tag{5.6.6}$$

那么，$\bar{\alpha}^{(2)}$ 就是过程 $\alpha(\cdot)$ 的跳跃的均方值. 显然，如果 $\bar{\alpha}^{(2)}=0$，则 $\alpha(\cdot)$ 的样本函数以概率1连续. 因此，估计 $\bar{\alpha}^{(2)}$ 的值对这个连续性问题就显得特别重要.

对 $\forall\ t\in T_\infty\ n\geqslant 1,\exists\ k=k(t)$，使得

$$\frac{k}{2^n}\leqslant t<\frac{k+1}{2^n}=\varphi_n(t).$$

显然，当 $n\uparrow\infty$ 时，$\varphi_n(t)\downarrow t$. 定义

$$\alpha_n(t)=E(\alpha(\varphi_n(t))|\mathscr{F}_t)\quad(t\in T_\infty). \tag{5.6.7}$$

$$\tau_{n,\varepsilon}=\inf\{t:\alpha_n(t)-\alpha(t)\geqslant\varepsilon\},\inf\varnothing=\infty. \tag{5.6.8}$$

那么，过程 $\alpha_n(\cdot)$ 为具有下列性质.

性质1 $\alpha_n(\cdot)$ 为下鞅. 事实上

$$\begin{aligned}E(\alpha_n(t)|\mathscr{F}_s)&=E(E(\alpha(\varphi_n(t))|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s)\\&=E(\alpha(\varphi_n(t))|\mathscr{F}_s)\geqslant E(\alpha(\varphi_n(s))|\mathscr{F}_s)\\&=\alpha_n(s)\quad(s,t\in T_\infty,s\leqslant t).\end{aligned}$$

性质2 $\alpha_n(\cdot)$ 为右连续过程.

事实上，$E\alpha_n(t)=E\alpha(\varphi_n(t))$，$t\in T_\infty$. 这是一个关于 t 的右连续的简单函数. 于是，按定理5.1.1，$\alpha_n(\cdot)$ 存在右连续代表. 从而，总可假定 $\alpha_n(\cdot)$ 为右连续过程.

性质3 对$\forall\ \varepsilon>0$，当 $n\uparrow\infty$ 时，$\tau_{n,\varepsilon}\uparrow\tau_\varepsilon$.

事实上，$\alpha(t)$，$t\in T_\infty$，的样本函数以概率一单调下降. 因此当 $n\uparrow\infty$ 时，$\alpha_n(t)-\alpha(t)=E(\alpha(\varphi_n(t))-\alpha(t)|\mathscr{F}_t)\downarrow$，从而，由 $\tau_{n,\varepsilon}$ 之定义，有 $\tau_{n,\varepsilon}\uparrow\tau_\varepsilon$，且 τ_ε 为 $\mathscr{F}_.$-时.

性质4 若 τ 为 $\mathscr{F}_.$-时，则 $\alpha_n(\tau)=E(\alpha(\varphi_n(\tau))|\mathscr{F}_\tau)$.

事实上，定义，如 $t_i^{(k)}\leqslant\tau<t_{i+1}^{(k)}$

$$\tau_k=\begin{cases}t_{i+1}^{(k)},\\\infty,\end{cases}\text{如 }\tau=\infty,\qquad\text{其中 }t_i^{(k)}=\frac{i}{2^k},k\geqslant1,i\geqslant0,$$

则当 $k\uparrow\infty$ 时，$\tau_k\downarrow\tau$，且

$$\alpha_n(\tau_k)=E(\alpha(\varphi_n(\tau_k))|\mathscr{F}_{\tau_k})\quad(k\geqslant1).$$

此式的成立，是因为：对$\forall\ A\in\mathscr{F}_{\tau_k}$，有

$$\begin{aligned}\int_A\alpha(\varphi_n(\tau_k))\mathrm{d}P&=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i}\alpha(\varphi_n(t_i^{(k)}))\mathrm{d}P+\int_{A_\infty}\alpha(\varphi_n(\tau_k))\mathrm{d}P\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i}E(\alpha(\varphi_n(t_i^{(k)}))|\mathscr{F}_{t_i^{(k)}})\\&\quad+\int_{A_\infty}E(\alpha(\varphi_n(\infty))|\mathscr{F}_\infty)\mathrm{d}P\end{aligned}$$

$$= \int_A \alpha_n(\tau_k) \mathrm{d}P,$$

其中，$A_k = A\cdot(\tau_k = t_i^{(k)})$，$A_\infty = A\cdot(\tau_k=\infty)$，$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathscr{F}_{t_i^{(k)}})$，故由右连续及一致可积性可推出

$$\alpha_n(\tau) = E(\lim_{k\to\infty}\alpha_n(\tau_k)\,|\,\mathscr{F}_\tau) = \lim_{k\to\infty}E(\alpha(\varphi_n(\tau_k))\,|\,\mathscr{F}_\tau)$$
$$= E(\alpha(\varphi_n(\tau))\,|\,\mathscr{F}_\tau).$$

性质5 $E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\tau_{n,\varepsilon})) \geqslant \varepsilon\cdot P(\tau_\varepsilon<\infty) + E(\alpha(\tau_\varepsilon) - \alpha(\varphi_n(\tau_\varepsilon)))$.

注意到：$E\alpha(\varphi_n(\tau_\varepsilon)) \geqslant E\alpha(\varphi_n(\tau_{n,\varepsilon})) = E\alpha_n(\tau_{n,\varepsilon})$，及 $\alpha_n(t)\geqslant \alpha(t)(t\in T_\infty)$. 可得

$$\begin{aligned}E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\tau_{n,\varepsilon})) &= E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\varphi_n(\tau_{n,\varepsilon})))\\ &\quad + E(\alpha(\varphi_n(\tau_{n,\varepsilon}))-\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))\\ &\geqslant E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\varphi_n(\tau_\varepsilon)))\\ &\quad + E(\alpha_n(\tau_{n,\varepsilon})-\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))\\ &\geqslant E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\varphi_n(\tau_\varepsilon)))+\varepsilon\cdot P(\tau_\varepsilon<\infty).\end{aligned}$$

根据上面的分析，可得到如下关于 $\bar{\alpha}^{(2)}$值的估计式.

引理5.6.4 假定 $\alpha(\cdot)$与正则势 $\zeta(\cdot)$为相联过程，且 $E\alpha^2(\infty)<\infty$，则对$\forall\ \varepsilon>0, n\geqslant 1$，有

$$\bar{\alpha}^{(2)} \leqslant \varepsilon\cdot E\alpha(\tau_{n,\varepsilon}) + E[\alpha(\infty)\cdot(\alpha(\infty)-\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))], \quad (5.6.9)$$

其中 $\bar{\alpha}^{(2)}$由(5.6.6)式定义，$\tau_{n,\varepsilon}$由(5.6.8)式定义.

证 记 $\Delta_k^n = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$，则由 $\alpha_n(t)$之定义可知$\{\alpha_n(s), \mathscr{F}_s, s\in\Delta_k^n\}$为一非负右闭鞅. 从而，利用引理5.5.3可推出

$$E\int_{\Delta_k^n}(\alpha_n(t)\mathrm{d}\alpha(t)) = E(\int_{\Delta_k^n}\alpha_n(t_-)\mathrm{d}\alpha(t)).$$

$$\Rightarrow E(\int_0^\infty \alpha_n(t_-)\mathrm{d}\alpha(t)) = (\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_n(t_-)\mathrm{d}\alpha(t))$$

$$= E(\int_0^\infty \alpha_n(t)\mathrm{d}\alpha(t)). \quad (5.6.10)$$

另一方面

$$E(\int_{\Delta_k^n}\alpha_n(t)\mathrm{d}\alpha(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}E[\alpha_n(t_{k+1}^{(n)}-\varepsilon)\cdot(\alpha(t_{k+1}^{(n)}-\varepsilon)-\alpha(t_k^{(n)}))]. \tag{5.6.11}$$

按照定理5.5.1，$\alpha(t)$是$\mathscr{F}_{t-}$-可测的. 应用定理4.4.2就可得出

$$\alpha(t_{k+1}^{(n)}-\varepsilon)=E(\alpha(t_{k+1}^{(n)})|\mathscr{F}_{t_{k+1}^{(n)}-\varepsilon})\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{\text{a.c}}E(\alpha(t_{k+1}^{(n)})|\mathscr{F}_{t_{k+1}^{(n)}-0})$$
$$=\alpha(t_{k+1}^{(n)}).$$

由(5.6.11)式及 Lebesque 控制收敛定理，有

$$E(\int_0^\infty \alpha_n(t)\mathrm{d}\alpha(t)) = \sum_{k=0}^\infty E[\alpha(t_{k+1}^{(n)})\cdot(\alpha(t_{k+1}^{(n)})-\alpha(t_k^{(n)}))].$$

于是，由此并注意到(5.6.10)式，有

$$E[\int_0^\infty(\alpha(t)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)] = \lim_{n\to\infty}E[\int_0^\infty(\alpha_n(t)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}E[\int_0^\infty(\alpha_n(t_-)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}E[(\int_0^{\tau_{n,\varepsilon}}+\int_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty)(\alpha_n(t_-)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)]$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}[\varepsilon\cdot E\alpha(\tau_{n,\varepsilon})+E(\int_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty\alpha_n(t_-)\mathrm{d}\alpha(t))]. \tag{5.6.12}$$

现在，令$\eta(t)=E(\alpha(\infty)|\mathscr{F}_t)$，$t\in T_\infty$，则$\eta(t_-)\geqslant\alpha_n(t_-)$，$t\in T_\infty$. 于是

$$E(\int_{\tau_{n,\varepsilon}}\alpha_n(t_-)\mathrm{d}\alpha(t))\leqslant E(\int_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty\eta(t_-)\mathrm{d}\alpha(t))$$
$$=E[\alpha(\infty)\cdot(\alpha(\infty)-\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))].$$

将此不等式代入(5.6.12)式的右边即得(5.6.9)式.

引理5.6.5 假定拟鞅$\zeta(\cdot)\in[D]$. 则$\zeta(\cdot)$正则的充要条件是对$\forall\ \tau_n\uparrow\tau$. 当$n\uparrow\infty$时，其中$\tau,\tau_n,n\geqslant 1$，均为$\mathscr{F}_\cdot$-时，有

$$\lim_{n\to\infty}E\zeta(\tau_n)=E\zeta(\tau).$$

注意：这里的τ不必是有界时.

证 充分性显然. 下面证明必要性.

$\zeta(\cdot)\in[D]$及$\zeta(\cdot)$为拟鞅蕴含着：$\sup\{E\zeta^\pm(t),t\in T_\infty\}<\infty$，

$\|V\|<\infty$. 按定理5.3.1, a.c-$\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=\zeta(\infty)\in L_1$. 注意：

$$\zeta(\tau)=\zeta_1(\tau)+\zeta_2(\tau),$$

其中 $\zeta_1(\tau)=\zeta(\tau)\cdot\chi_{(\tau<\infty)}$, $\zeta_2(\tau)=\zeta(\tau)\cdot\chi_{(\tau=\infty)}$.

令 $\tau_n'=\tau\wedge n, n\geqslant 1$, 则 $\tau_n'\in\mathscr{T}$. 从而 $\zeta_1(\tau_n')=\zeta(\tau_n')$ 且 $\zeta_1(\tau_n'), n\geqslant 1$, 一致可积. 这表明：$\exists\ 0<C<\infty$, $\ni E|\zeta_{(\tau_n')}|\leqslant C$ 关于 $n\geqslant 1$ 一致成立. 故 $\zeta(\cdot)\in[D]$ 意味着：$E|\zeta_1(\tau)|=\lim\limits_{n\to\infty}E|\zeta_1(\tau_n')|\leqslant C<\infty$. 又 $E|\zeta_2(\tau)|\leqslant E|\zeta(\infty)|<\infty$. 于是, $E|\zeta(\tau)|<\infty$, 即 $\zeta(\tau)\in L_1$.

不难证明：$\lim\limits_{n\to\infty}E(\zeta(\tau_n)\cdot\chi_{(\tau<\infty)})=E(\zeta(\tau)\cdot\chi_{(\tau<\infty)})$.

现在, 令 $\bar{\zeta}_n=\zeta(\tau_n)\cdot\chi_{(\tau=\infty)}$ 则 $\bar{\zeta}_n, n\geqslant 1$, 一致可积, 且 a.c-$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\zeta}_n=\bar{\zeta}_\infty\triangleq\zeta(\infty)\cdot\chi_{(\tau=\infty)}$. 于是, 按 Lebesque 收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}E\bar{\zeta}_n=E\bar{\zeta}_\infty.\ \lim_{n\to\infty}E\bar{\zeta}_{\tau_n}=E\zeta(\tau).$$ #

定理5.6.1 设势 $\zeta(\cdot)\in[D]$, 那么, 此势正则的充要条件是其相联过程 $\alpha(\cdot)$ 的样本函数以概率1连续.

证 充分性就是引理5.6.1之结论. 下证必要性.

首先. 设 $E\alpha^2(\infty)<\infty$. 考虑到：势的正则性及 $\tau_{n,\varepsilon}\uparrow\tau_\varepsilon$, 并引用引理5.6.5就可得到：

$$E(\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))=E(\zeta(\tau_{n,\varepsilon})-\zeta(\tau_\varepsilon))\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad(\forall\ \varepsilon>0). \tag{5.6.13}$$

令 $\xi_n=\alpha(\tau_\varepsilon)-\alpha(\varphi_n(\tau_\varepsilon))$, 则 $|\xi_n|\leqslant\alpha(\infty)$；注意到：$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 一致可积, 且由 $\varphi_n(\tau_\varepsilon)\downarrow\tau_\varepsilon$ 及 $\alpha(\cdot)$ 右连续, 推出 a.c-$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$,

故应用 Lebesque 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}E\xi_n=0. \tag{5.6.14}$$

将(5.6.13)式和(5.6.14)式代入性质5的不等式中, 可推得 $P(\tau_\varepsilon<\infty)=0\quad(\forall\ \varepsilon>0)$. 从而, 由(5.6.13)式得

$$E\alpha(\infty)=\lim_{n\to\infty}E\alpha(\tau_{n,\varepsilon}))^2\leqslant\alpha^2(\infty),(\forall\ \varepsilon>0).$$ 令

$$Y_n^2=(\alpha(\infty)-\alpha(\tau_n,\varepsilon)^2)\leqslant\alpha^2(\infty), \text{且 } \gamma_n^2\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.c}}0,$$

则按 Lebesque 控制收敛定理，$EY_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. 于是，由引理5.6.4可推出

$$\overline{\alpha}^{(2)}=E\left(\int_0^\infty (\alpha(t)-\alpha(t_-))\mathrm{d}\alpha(t)\right)=0.$$

故当 $E\alpha^2(\infty)<\infty$ 时，定理的必要条件成立.

现在，取消假设 $E\alpha^2(\infty)<\infty$.

对 $\forall\ n\geqslant 0$，令 $\alpha_n(t)=\alpha(t)\wedge(n+1)-\alpha(t)\wedge n, t\in T_\infty$.
按照引理5.5.4，$\alpha(t)\wedge n, t\in T_\infty$，为可料可积增过程. 从而对任意固定的 $n\geqslant 0$，$\alpha_n(\cdot)$ 为可料可积增过程. 令

$$\zeta_n(t)=E(\alpha_n(\infty)\,|\,\mathscr{F}_t)-\alpha_n(t), t\in T_\infty \quad (n\geqslant 0),$$

则 $\zeta_n(\cdot)$ 为有界的右连续势. 下面要证明：对 $\forall\ n\geqslant 0$，$\zeta_n(\cdot)$ 是正则的. 显然

$$\alpha(t)=\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t), \zeta(t)=\sum_{n=0}^\infty \zeta_n(t) \quad (t\in T_\infty).$$

令

$$z_n(t)=\zeta(t)-\zeta_n(t), t\in T_\infty,$$

则 $z_n(\cdot)\in[D]$，且为势. 并具有相联过程 $\alpha(t)-\alpha_n(t), t\in T_\infty$. 设 $\tau_k,\tau\in\mathscr{T}$，且 $\tau_k\uparrow\tau$. 则不难证明下列各不等式

$$\varliminf_{k\to\infty} E\zeta_n(\tau_k)\geqslant E\zeta_n(\tau), \varliminf_{k\to\infty} Ez_n(\tau_k)\geqslant Ez_n(\tau). \qquad (5.6.15)$$

注意：$\zeta(t)=\zeta_n(t)+z_n(t), t\in T_\infty$. 于是

$$E\zeta(\tau_k)=E\zeta_n(\tau_k)+Ez_n(\tau_k) \quad (k\geqslant 1, n\geqslant 0). \qquad (5.6.16)$$

$\zeta(\cdot)$ 正则表明：$\lim\limits_{k\to\infty} E\zeta(\tau_k)=E\zeta(\tau)$. 从而，(5.6.16)式右边有极限存在. 利用(5.6.15)式及 $\zeta_n(\cdot)$ 和 $z_n(\cdot)$ 的非负性就得到

$$\lim_{k\to\infty} E\zeta_n(\tau_k)=E\zeta_n(\tau),$$

故 $\zeta_n(\cdot)$ 为正则势 $(n\geqslant 0)$.

对 $\forall\ _n\geqslant 0$，有 $E\alpha_n^2(\infty)\leqslant(n+1)^2<\infty$. 那么按前一部分的证明：$\alpha_n(\cdot)$ 连续. 若能证明：级数 $\sum\alpha_n(t)$ 关于 $t\in T_\infty$ (a.c) 一级收敛，则 $\alpha(\cdot)$ 连续. 从而，定理的必要条件成立. 注意：对 $\forall\ N>0$，有

$$\gamma_N(t) \triangleq \alpha(t) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t) \leqslant \alpha(\infty) - \sum_{n=0}^{N} \alpha(\infty) \triangleq \gamma_N(\infty), t \in T_\infty.$$

这是因为 $\gamma_N(\cdot)$为可料可积增过程. 然而

$$E\alpha(\infty) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\infty)\right) < \infty.$$

于是,$\gamma_N(\infty) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.c}} 0$. 故级数 $\sum \alpha_n(t)$关于 $t \in T_\infty$以概率1一致收敛.

推论5.6.1 设 $\bar{\alpha}(0)=0$,且 $\bar{\alpha}(t), t\in T_\infty$,为连续可积增过程,则 $\bar{\alpha}(\cdot)$可唯一地表示成如下分解形式

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \eta(t), t \in T_\infty,$$

其中 $\alpha(\cdot)$为连续可料可积增过程;$\eta(\cdot)$为右闭鞅,且 $\eta(0)=0$.

证 令 $\zeta(t) = E(\bar{\alpha}(\infty) | \mathscr{F}_t) - \bar{\alpha}(t), t \in T_\infty$,则 $\zeta(\cdot) \in [D]$,且为正则势. 按上述定理,$\zeta(\cdot)$的相联过程 $\alpha(\cdot)$是连续的. 故$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \eta(t), t \in T_\infty$,其中 $\eta(t) = E(\bar{\alpha}(\infty) - \alpha(\infty) | \mathscr{F}_t), t \in T_\infty$. 显然,$\eta(0)=0$. #

第六章　平方可积鞅

在鞅分析中，平方可积鞅是一类特别重要的鞅，关于这类鞅，建立起来的随机积分就具有某些特别重要的性质．本章仍假定σ-代数流$\mathscr{F}t, t\in T_\infty$，是右连续的，即$\mathscr{F}t=\mathscr{F}t_+, t\in T_\infty$，其中$T_\infty=[0,\infty)$，所有被涉及到的变量都定义在完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上．

§1　空间M_2和M_2^c

假如$\{\xi(t),\mathscr{F}t, t\in T_\infty\}$为右连续非负下鞅，我们总假定所涉及到的过程是可分的，将定理4.3.2推广并应用于此非负下鞅就可得到不等式

$$E(\sup_t \xi_t)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\cdot\sup_t E\xi_t^p\quad(p>1).\tag{6.1.1}$$

假定$\{\mu(t),\mathscr{F}t, t\in T_\infty\}$为右连续鞅，且$\mu(t)\in L_2$，$(\forall\, t\in T_\infty)$，则$|\mu(t)|, t\in T_\infty$为非负右连续下鞅，因此，若在(6.1.1)式中，让$p=2, \xi_t=|\mu(t)|$，则有

$$E(\sup_t|\mu(t)|^2)\leqslant 4\sup_t E|\mu(t)|^2.\tag{6.1.2}$$

引理6.1.1　假定$\mu(\cdot)$为鞅，且

$$\sup_t E|\mu(t)|^2<\infty,\tag{6.1.3}$$

则$\mu^2(\cdot)$为右闭下鞅，$\mu(\cdot)$为右闭鞅．

证　令　$\mu^2=\sup_t\mu^2(t)$，则由(6.1.2)和(6.1.3)两式，有：$\mu^2\in L_1$且　$\mu^2(t)\leqslant E(\mu^2/\mathscr{F}t)\quad(t\in T_\infty)$，考虑到条件(6.1.3)式并应用定理5.3.1，可得：a.c-$\lim_{t\to\infty}\mu(t)=\mu(\infty)\in L_1$，显然，$|\mu(t)|\leqslant|\mu|\in L_1, t\in T_\infty$．于是，$\mu(\cdot)$一致可积，从而右闭，且右闭元为

$(\mu(\infty),\mathscr{F}_\infty)$，而 $\mu^2(\cdot)$的右闭元为$(\mu^2,\mathscr{F}_\infty)$. #

推论 6.1.1 若鞅 $\mu(\cdot)$满足条件(6.1.3)式，则 $\mu^2(\cdot)\in[D]$.

证 根据定理 5.4.1，右连续的右闭鞅和右连续非负右闭下鞅均属于类$[D]$.

定义 6.1.1 若右连续鞅$\{\mu(t),\mathscr{F}t,t\in T_\infty\}$满足条件：

$$\sup_t E\mu^2(t)<\infty,$$

则称 $\mu(\cdot)$为平方可积鞅.

定义两个符号：

$M_2\triangleq M_2(\mathscr{F}.,P)=\{\mu(\cdot):\mu(\cdot)$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的平方可积鞅$\}$.

$M_2^c\triangleq M_2^c(\mathscr{F}.,P)=\{\mu(\cdot):\mu(\cdot)\in M_2$，且 $\mu(\cdot)$为连续过程$\}$.

在 M_2 中引入如下内积：对$\forall\ \mu(\cdot)$、$\nu(\cdot)\in M_2$，定义

$$(\mu,\nu)=E(\mu(\infty).\nu(\infty)),\qquad(6.1.4)$$

那么，M_2 就成为一个内积空间，在本节开始，我们做了一些简单分析，对$\forall\ \mu(\cdot)\in M_2$，有 a.c-$\lim\limits_{t\to\infty}\mu(t)=\mu(\infty)\in L_2$，且 $\mu(t)=E(\mu(\infty)/\mathscr{F}t)$，$\mu(\infty)$还是 $\mathscr{F}_\infty$-可测的，这里

$$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\underset{t\in Q^+}{U}\mathscr{F}_t),Q^+$$

为 T_∞中有理数全体. 现在，定义空间 $\mathscr{L}_2$：

$$\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(\mathscr{F}_\infty,P)=\{\eta:\eta\in L_2,\text{且 }\eta\text{ 是 }\mathscr{F}_\infty\text{-可测的}\}$$

定义其内积如下：对$\forall\ \eta,\varphi\in\mathscr{L}_2$，有$(\eta.\varphi)=E(\eta.\varphi)$. 那么，空间 M_2 和 $\mathscr{L}_2$ 就是 1-1 对应，且等距的，因为 $\mu(\cdot)\in M_2$ 由某个 $\mu\in\mathscr{L}_2$ 唯一決定，即 $\mu(t)=E(\mu/\mathscr{F}t)$，$t\in T_\infty$.

综上分析，可以看出：定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的平方可积鞅由两个因素决定：其一是 $\mathscr{F}_\infty$-可测的平方可积变量；其二是右连续 σ-代数流 $\mathscr{F}t$，$t\in T_\infty$.

定理 6.1.1 由(6.1.4)式定义其内积的空间 M_2 为一个

Hilbert 空间，M_2^c 为 M_2 中的闭子空间.

证 对$\forall$ $\mu(\cdot)\in M_2$，定义其范数为

$$\|\mu(\cdot)\|_2=(E\mu^2(\infty))^{\frac{1}{2}}.$$

现假定 $\mu_n(\cdot),n\geqslant 1$，为 M_2 中的 Cauchy 列，则$\exists$ $\mu(\infty)\in\mathscr{L}_2$，使得

当 $n\to\infty$时，$\mu_n(\infty)\xrightarrow{\mathscr{L}_2}\mu(\infty)\in\mathscr{L}_2$.

令 $\mu(t)=E(\mu(\infty)/\mathscr{F}t),t\in T_\infty$，则 $\mu(\cdot)$为右连续右闭鞅，且 $\|\mu(\cdot)\in M_2$，注意：$\mu_n(t)=E(\mu_n(\infty)/\mathscr{F}t)\quad(t\in T_\infty,n\geqslant 1)$，于是

$$|\mu_n(t)-\mu(t)|\leqslant E(|\mu_n(\infty)-\mu(\infty)|\mathscr{F}t)\quad(t\in T_\infty).$$

因此，a.c-$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(t)=\mu(t)\quad(t\in T_\infty)$，且

$$\|\mu_n(\cdot)-\mu(\cdot)\|_2\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

故 $\mu_n(\cdot),n\geqslant 1$，依范数收敛到 $\mu(\cdot)$，从而，M_2 为 Hilbert 空间.

如果 $\mu_n(\cdot)\in M_2^c$，且 $\mu_n(\cdot),n\geqslant 1$，为 Cauchy 到，则$\exists$ $\mu_n\in M_2$，$\ni\|\mu_n(\cdot)-\mu(\cdot)\|_2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. 注意：

$$\sup_t|\mu_n(t)-\mu(t)|\leqslant\sup_t E(|\mu_n(\infty)-\mu(\infty)|/\mathscr{F}t),t\in T_\infty.$$

那么，a.c-$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_t|\mu_n(t)-\mu(t)|=0$，此式表明：$\mu_n(t),t\in T_\infty$，关于 t(a.c)一致收敛到 $\mu(t),t\in T_\infty$. 从而，$\mu(\cdot)$连续，即

$$\mu(\cdot)\in M_2^c.$$

§2 鞅的特征

按照推论 6.1.1，当 $\mu(\cdot)\in M_2$ 时，$\mu^2(\cdot)\in[D]$，因此，应用 Riesc-Doob-Meyer 分解于上鞅$\{-\mu^2(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$，即可达到：

$$\mu^2(t)=\nu(t)+\alpha(t),\quad t\in T_\infty,\tag{6.2.1}$$

其中，$\nu(\cdot)$为右闭鞅；$\alpha(\cdot)$为右连续可料可积增过程.

定义 6.2.1 设 $\mu(\cdot)\in M_2$，若$\{\alpha(t),\mathscr{F}t,t\in T_\infty\}$具有下列

性质：

(i)$\alpha(\cdot)$为右连续可料可积增过程．

(ii)$\nu(t)=\mu^2(t)-\alpha(t)$，$t\in T_\infty$，为右闭鞅，

则称过程 $\alpha(\cdot)$为平方可积鞅 $\mu(\cdot)$的特征，记为

$$\langle\mu,\mu\rangle_t\triangleq\alpha(t)\quad(t\in T_\infty).\tag{6.2.2}$$

从此定义中不难看出：鞅的特征由(6.2.1)式决定．

引理 6.2.1 假如 $\mu(\cdot)\in M_2$，σ、τ 为 $\mathscr{F}$-时，且 $\sigma\leqslant\tau$，则

$$E[(\mu(\tau)-\mu(\sigma))^2/\mathscr{F}_\sigma]=E[\langle\mu,\mu\rangle\tau-\langle\mu,\mu\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma].\tag{6.2.3}$$

证
$$\begin{aligned}&E((\mu(\tau)-\mu(\sigma))^2/\mathscr{F}_\sigma)\\&=E(\mu^2(\tau)-2\mu(\tau)\cdot\mu(\sigma)+\mu^2(\sigma)/\mathscr{F}_\sigma)\\&=E(\mu^2(\tau)-\mu^2(\sigma)/\mathscr{F}_\sigma)\\&=E(\langle\mu,\mu\rangle\tau-\langle\mu,\mu\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma).\end{aligned}$$

这里利用了定理 4.1.5，即 $E(\mu(\tau)/\mathscr{F}_\sigma)=\mu(\sigma)$.

推论 6.2.1 若 $\mu(\cdot)\in M_2$，则

$$E((\Delta\mu(t))^2/\mathscr{F}t)=E(\Delta<\mu,\mu>t/\mathscr{F}t),t\in T_\infty,\quad(6.2.4),$$

其中 $\Delta\xi(t)=\xi(t+\Delta t)-\xi(t)$，$\Delta t>0$.

证 在引理 6.2.1 中，让 $\tau=t+\Delta t$，$\sigma=t$，则它们均为 $\mathscr{F}$-时，从而，(6.2.4)式为(6.2.3)式的特例.

例 6.2.1 设 $W(\cdot)\in M_2^c$；$T=[0,\bar{t}]$，$(\bar{t}>0)$；若

(i)$W(0)=0$；$EW(t)=0(t\in T)$；$W(\cdot)$具有独立增量性质；

(ii)$\sigma(W(u);0\leqslant u\leqslant t)\subset\mathscr{F}t$；$\sigma(W(s)-W(t))$独立于 $\mathscr{F}t(t,s\in T,t<s)$，

则 $W(\cdot)$的特征为：$\alpha(t)=EW^2(t)(t\in T)$.

证 显然 $\alpha(0)=0$，$\alpha(t)$，$t\in T$，为非随机函数，因此，它是可料的. 又

$$\begin{aligned}\alpha(t+\Delta t)&=EW^2(t+\Delta t)=E(W(t+\Delta t)-W(t)+W(t))^2\\&=E(\Delta W(t))^2+EW^2(t)\geqslant\alpha(t)\quad(t\in T),\end{aligned}$$

故 $\alpha(\cdot)$为可料可积增过程．

现在我们来证明：$\alpha(\cdot)$是 $W(\cdot)$的特征．

令 $\nu(t)=W^2(t)-\alpha(t),t\in T$，则对$\forall\ t\in T,\Delta t>0$，有

$$
\begin{aligned}
E\ (\nu(t+\Delta t)/\mathscr{F}_t)&=E[W^2(t+\Delta t)-\alpha(t+\Delta t)/\mathscr{F}_t]\\
&=E[(\Delta W(t))^2+W^2(t)-2W(t)\Delta W(t)\\
&\quad-\Delta\alpha(t)-\alpha(t)/\mathscr{F}_t]\\
&=\nu(t)+E[(\Delta W(t))^2-\Delta\alpha(t)/\mathscr{F}_t)\\
&=\nu(t)+E(\Delta W(t))^2-\Delta\alpha(t),=\nu(t),
\end{aligned}
$$

故 $E(\nu(t+\Delta t)/\mathscr{F}_t)=\nu(t)$，即 $\nu(\cdot)$为鞅，由 $\nu(\cdot)$的表达式中可得出其右闭性，定义 6.2.1 表明：结论真．

在§1 中，定义的空间 M_2 是一个线性 Hilbert 空间，但一般地说，M_2 中任意两个元素的乘积并不属于这个空间，然而，这种乘积也具有某些重要的特性，比如，让 $\mu_i(\cdot)\in M_2,i=1,2$，则

$$\mu_1(t)\cdot\mu_2(t)=\frac{1}{2}(\mu_1(t)+\mu_2(t))^2-\frac{1}{2}(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)),\quad t\in T_\infty. \tag{6.2.5}$$

注意：$\mu_1(t)+\mu_2(t)\in M_2$，所以具有特征$\langle\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle t$，于是，(6.2.5)式可表示为

$$\mu_1(t)\cdot\mu_2(t)=\nu_{12}(t)+\alpha_{12}(t),t\in T_\infty, \tag{6.2.6}$$

其中 $\nu_{12}(\cdot)$为右闭鞅；而

$$\alpha_{12}(t)=\frac{1}{2}[\langle\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle_t-\langle\mu_1,\mu_1\rangle_t-\langle\mu_2,\mu_2\rangle_t],\quad t\in T_\infty. \tag{6.2.7}$$

定义 6.2.2 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2,i=1,2$，如果过程 $\alpha_{12}(\cdot)$具有下列性质：

(i)$\alpha_{12}(\cdot)$为两个可料可积增过程之差；

(ii)$\nu_{12}(t)=\mu_1(t)\cdot\mu_2(t)-\alpha_{12}(t),t\in T_\infty$，为右闭鞅；

则称 $\alpha_{12}(\cdot)$为 $\mu_1(\cdot)$和 $\mu_2(\cdot)$的联合特征，记为

$$\langle\mu_1,\mu_2\rangle_t\triangleq\alpha_{12}(t),t\in T_\infty. \tag{6.2.8}$$

引理 6.2.2 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2,i=1,2,\sigma$、$\tau$ 为 $\mathscr{F}$-时，且 $\sigma\leqslant\tau$．则

$$
\begin{aligned}
&E[(\mu_1(\tau)-\mu_1(\sigma))\cdot(\mu_2(\tau)-\mu_2(\sigma))/\mathscr{F}_\sigma]\\
&=E[\langle\mu_1,\mu_2\rangle\tau-\langle\mu_1,\mu_2\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma]
\end{aligned}
\tag{6.2.9}
$$

证 令 $\Delta\mu_i(\sigma)=\mu_i(\tau)-\mu_i(\sigma), i=1,2$,则利用定理 5.2.2,可得

$$
\begin{aligned}
&E[\Delta\mu_1(\sigma)\cdot\Delta\mu_2(\sigma)/\mathscr{F}_\sigma]\\
&=E[\mu_1(\tau)\cdot\mu_2(\tau)-\mu_1(\sigma)\cdot\mu_2(\sigma)/\mathscr{F}_\sigma]\\
&=E[\langle\mu_1,\mu_2\rangle\tau-\langle\mu_1,\mu_2\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma].
\end{aligned}
$$

定理 6.2.1 假设 $\mu_i(\cdot)\in M_2, i=1,2$. σ 和 $\sigma+\Delta\sigma$ 均为 $\mathscr{F}$-时. 记 $\Delta\alpha_\sigma=\alpha_{\sigma+\Delta\sigma}-\alpha_\sigma$,则

$$
\begin{aligned}
&|E(\Delta\langle\mu_1,\mu_2\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma)|^2\\
&\leqslant E(\Delta\langle\mu_1,\mu_1\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma)\cdot E(\Delta\langle\mu_2,\mu_2\rangle\sigma/\mathscr{F}_\sigma).
\end{aligned}
\tag{6.2.10}
$$

证 在公式(6.2.9)的左边利用 Holder 不等式,然后利用公式(6.2.3)即可得(6.2.10)式.

推论 6.2.2 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2, i=1,2$. 则对 $\forall\ t\in T_\infty, \Delta t>0$,有

$$
\begin{aligned}
&|E(\Delta\langle\mu_1,\mu_2\rangle_t/\mathscr{F}t)|^2\\
&\leqslant E(\Delta\langle\mu_1,\mu_1\rangle_t/\mathscr{F}t)\cdot E(\Delta\langle\mu_2,\mu_2\rangle t/\mathscr{F}t).
\end{aligned}
\tag{6.2.11}
$$

证 令 $\sigma=t, \sigma+\Delta\sigma=t+\Delta t$,则(6.2.10)式就成为(6.2.11)式.

§3 拟左连续鞅

本节讨论平方可积鞅的特征之连续性问题. 在第五章的§6中已经讨论过正则势. 定理 5.6.1 表明:类[D]中势为正则的充要条件是其相联过程连续,因此,按照此定理,平方可积鞅的特征连续的充要条件是此鞅正则. 现在,我们首先考察平方可积鞅正则性的表现形式.

定理 6.3.1 设 $\mu(\cdot)\in M_2$. 那么 $\mu(\cdot)$之特征 $\langle\mu,\mu\rangle$. 连续的充要条件为

$$
\text{P-}\lim_{n\to\infty}\mu(\tau_n)=\mu(\tau),
\tag{6.3.1}
$$

其中 τ 为有界的 $\mathscr{F}$-时,τ_n 为 $\mathscr{F}$-时,且 $\tau_n\uparrow\tau$.

证 按照定理 5.6.1，$\langle\mu,\mu\rangle$. 连续等价于 $\mu^2(\cdot)$正则．而 $\mu^2(\cdot)$正则等价于

$$\lim_{n\to\infty}E(\mu(\tau_n)-\mu(\tau))^2=0. \tag{6.3.2}$$

事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}E(\mu(\tau_n)-\mu(\tau))^2=\lim\limits_{n\to\infty}(E(\mu^2(\tau)-E\mu^2(\tau_n))=0.$

最后，我们证明：(6.3.2)式等价于(6.3.1)式．令

$A_n(\varepsilon)=\{\omega: |\mu(\tau)-\mu(\tau_n)|>\varepsilon\}$，$A_n^c(\varepsilon)=\Omega\backslash A_n(\varepsilon)$，

若(6.3.2)式成立，即 $I_n^2=E(\mu(\tau_n)-\mu(\tau))^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，则

$$P(A_n(\varepsilon))\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot I_n^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

由此即得(6.3.1)式．

反之，若(6.3.1)式成立，即 $P(A_n(\varepsilon))\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，对$\forall\ \varepsilon>0$ 成立．

于是

$$\begin{aligned}I_n^2&=E\left(\int_{A_n(\varepsilon)}+\int_{A_n^c(\varepsilon)}\right)(\mu(\tau_n)-\mu(\tau))^2\mathrm{d}P\\&\leqslant\int_{A_n(\varepsilon)}4\sup_t\mu^2(t)\mathrm{d}P+\varepsilon^2,\end{aligned}$$

而 $\mu(\cdot)\in M_2$ 蕴含着：$\sup\limits_t\mu^2(t)\in L_1$. 于是，对$\forall\ \varepsilon>0$，有

$$\int_{A_n(\varepsilon)}4\sup_t\mu^2(t)\mathrm{d}P\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n^2=0$，此即(6.3.2)式．

注　不难看出：上述结论对任意 $\mathscr{F}$-时 τ 也是正确的．

定义 6.3.1 设 τ,τ_n 均为有界的 $\mathscr{F}$-时，且 $\tau_n\uparrow\tau$. 若右连续随机过程$\{\mu(\tau),\mathscr{F}t,t\in T_\infty\}$满足如下条件

$$\text{P-}\lim_{n\to\infty}\mu(\tau_n)=\mu(\tau), \tag{6.3.3}$$

则称此过程为拟左连续．

注意：定理 6.3.1 表明：平方可积鞅特征连续的充要条件是此鞅拟左连续，而且鞅拟左连续等价于该鞅平方后成为一个正则下鞅．

推论 6.3.1 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2^c$，$i=1,2$. 若 $\mu_i(\cdot)$拟左连续，$i=$

1,2,则其联合特征$\langle\mu_1,\mu_2\rangle_t$,$t\in T_\infty$,连续.

证 显然,$(\mu_1+\mu_2)(\cdot)$拟左连续,于是,按定理6.3.1,$\mu_i(\cdot)$,$i=1,2$,及$(\mu_1+\mu_2)(\cdot)$的特征连续,从而,由(6.2.7)式定义的联合特征$\langle\mu_1+\mu_2\rangle$.连续.

设$\lambda=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=u\}$为区间$[0,u]$的一个分割,$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$,$\|\lambda\|=\sup\limits_i\{\Delta t_i\}$.定义

$$\tilde{\alpha}_\lambda=\sum_{i=0}^{n-1}E(\Delta\alpha_i/\mathscr{F}_{t_i}),\text{其中 }\Delta\alpha_i=\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i).\qquad(6.3.4)$$

这里要说明一点:即使$\alpha(t)$,$t\in T_\infty$,为可料可积增过程,由它所产生的随机序列$\{\alpha(t_i),\mathscr{F}_{t_i},0\leqslant i\leqslant n\}$一般不具有可料性.因此,$\tilde{\alpha}_\lambda$不一定等于$\alpha(t_n)$(即$\alpha(u)$).然而,确有如下结论.

定理6.3.2 若$\{\alpha(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$为一连续可积增过程,则

$$L_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to0}\tilde{\alpha}_\lambda=\alpha(u).\qquad(6.3.5)$$

证 令$\|\Delta\alpha\|=\sup\limits_i\{\Delta\alpha_i\}$,则

$$\begin{aligned}E(\tilde{\alpha}_\lambda-\alpha(u))^2&=E[\sum_{i=0}^{n-1}(E(\Delta\alpha_i/\mathscr{F}_{t_i})-\Delta\alpha_i)]^2\\&=\mathrm{E}[\sum_{i=0}^{n-1}[(\Delta\alpha_i)^2-E(\Delta\alpha_i/\mathscr{F}_{t_i})^2]]\\&\leqslant E(\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta\alpha_i)^2)\\&\leqslant E(\|\Delta\alpha\|\cdot\alpha(u)).\end{aligned}$$

如果$\mathrm{E}\alpha^2(\mathrm{u})<\infty$,则$0\leqslant\alpha(\mathrm{u})\cdot\|\Delta\alpha\|\leqslant\alpha^2(u)$.从而,$\alpha(u)\cdot\|\Delta\alpha\|$关于分割$\lambda$一致可积.由$\alpha(\cdot)$的连续性可知:$\|\Delta\alpha\|\xrightarrow{\text{a.c.}}0$当$\|\lambda\|\to0$时,于是,由Lebesgue控制收敛定理,有$\lim\limits_{\|\lambda\|\to0}E(\alpha(u))\cdot\|\Delta\alpha\|)=0$,故

$$E|\tilde{\alpha}_\lambda-\alpha(u)|\leqslant E(\tilde{\alpha}_\lambda-\alpha(u))^2\to0,\text{当}\|\lambda\|\to0\text{时}.$$

此结果表明:当$E\alpha^2(u)<\infty$时,结论真.

现在考虑一般条件$E\alpha(u)<\infty$.若

$$\beta(t)=\alpha(t)\wedge k,\gamma(t)=\alpha(t)-\beta(t),t\in[0,u],k\in\mathbf{R}^{+}.$$

则 $\beta(\cdot)$、$\gamma(\cdot)$均为连续可积增过程，且 $E\beta^2(u)\leqslant k^2<\infty$. 于是，按前一段所得结果，有

$$\lim_{\|\lambda\|\to 0}E|\tilde{\beta}_\lambda-\beta(u)|=0. \tag{6.3.6}$$

因 $\lambda(u)\leqslant\alpha(u)$，$E\alpha(u)<\infty$及 a.c-$\lim\limits_{k\to\infty}\gamma(u)=0$，故有

$$\lim_{k\to\infty}E\gamma(u)=0. \tag{6.3.7}$$

这里应用了 Lebesgue 控制收敛定理，于是

$$E(\tilde{\alpha}_\lambda-\tilde{\beta}_\lambda)=E\tilde{\gamma}_\lambda=E\gamma(u)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

关于 λ 一致成立．注意：

$$\begin{aligned}E|\tilde{\alpha}_\lambda-\alpha(u)|&\leqslant E(\tilde{\alpha}_\lambda-\tilde{\beta}_\lambda)+E|\tilde{\beta}_\lambda-\beta(u)|+E\gamma(u)\\&=2E\gamma(u)+E|\tilde{\beta}_\lambda-\beta(u)|.\end{aligned}$$

对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ k=k(\varepsilon)>0$，使得 $2E\gamma(u)<\varepsilon$. 因此，

$$\lim_{\|\lambda\|\to 0}E|\tilde{\alpha}_\lambda-\alpha(u)|<\varepsilon+\lim_{\|\lambda\|\to 0}E|\tilde{\beta}_\lambda-\beta(u)|=\varepsilon.$$

由此 $\varepsilon>0$ 的任意性就得到要求的结论．

推论 6.3.2 设 $\mu(\cdot)\in M_2$，且其特征 $\alpha(\cdot)=\langle\mu,\mu\rangle$，连续．则对$\forall\ u>0$，有

$$\langle\mu,\mu\rangle u=L_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}E((\Delta\mu_i)^2/\mathscr{F}_{t_i}). \tag{6.3.8}$$

证 由公式(6.3.4)可得

$$E(\Delta\langle\mu,\mu\rangle_i/\mathscr{F}_{t_i})=E((\Delta\mu_i)^2/\mathscr{F}_{t_i}),$$

故引用上述定理 5.3.2，即可得(6.3.8)式．

推论 6.3.3 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2$，且其特征连续，$i=1,2$，则对$\forall\ u>0$，有

$$\langle\mu_1,\mu_2\rangle_u=L_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}E(\Delta\mu_1(t_i)\cdot\Delta\mu_2(t_i)\cdot/\mathscr{F}_{t_i}). \tag{6.3.9}$$

证 先引用引理 6.2.2 再利用定理 5.3.2 即可推出此结论．

定理 6.3.3 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2$，且其特征连续 $(i=1,2)$，则对$\forall\ u>0$，有

$$|\Delta\langle\mu_1,\mu_2\rangle u|^2\leqslant\Delta\langle\mu_1,\mu_1\rangle u\cdot\Delta\langle\mu_2,\mu_2\rangle u. \qquad (6.3.10)$$

证　注意：若 $\alpha(\cdot)$是可料可积增过程，则 $\Delta\alpha(t)=\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$是一个以 Δt 为流动参数的关于 σ-代数流 $\mathscr{F}_{t+\cdot}$ 的可料可积增过程．因此，让 λ 为$[u,u+\Delta u]$的分割，则应用推论 6.3.2 和 6.3.3 可推出

$$\begin{aligned}|\Delta\langle\mu_1,\mu_2\rangle u|^2&\leqslant[L_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}]\sum_{i=0}^{n-1}E(|\Delta\mu_1(t_i)|\cdot|\Delta\mu_2(t_i)_1\cdot/\mathscr{F}_{t_i})]^2\\&\leqslant L_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}E((\Delta\mu_1(t_i))^2/\mathscr{F}_{t_i}\\&\quad\cdot E((\Delta\mu_2(t_i))^2/\mathscr{F}_{t_i}\\&=\Delta\langle\mu_1,\mu_1\rangle u\cdot\Delta\langle\mu_2,\mu_2\rangle u.\end{aligned}$$

注　跟推论 6.2.2 比较，这个结果有明显的改进，但要求特征连续．

定义 6.3.2　设 $\mu(\cdot)$为一个随机过程．$u\in\mathbf{R}^+$．$\lambda=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=u\}$为区间$[0,u]$的分割．$\|\lambda\|=\sup_i\{\Delta_{t_i}\}$，令

$$\sigma_\lambda^2(u)\triangleq\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta\mu(t_i))^2. \qquad (6.3.11)$$

若 $\sigma_\lambda^2(u)$当 $\|\lambda\|\to 0$ 时依概率收敛到某变量 $v^2(u)$，则称变量 $v^2(u)$为过程 $\mu(\cdot)$在区间$[0,u]$上的二次变差．记为

$$[\mu,\mu]_u\triangleq v^2(u)=\mathrm{P}_1\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}\sigma_\lambda^2(u). \qquad (6.3.12)$$

不难看出：若过程 $\mu(\cdot)$的样本函数以概率 1 连续，且一阶变差有界，则此过程的二次变差$[\mu,\mu]_u=0$. 因此，只有当一阶变差(a.c)无界时，二次变差的讨论才有意义．

引理 6.3.1　若 $\mu(\cdot)\in M_2$，则对$\forall\ u\in\mathbf{R}^+$，变量族 $\sigma_\lambda^2(u)$关于 λ 是一致可积的．

证　定义：$\alpha_0^{(\lambda)}=\alpha_1^{(\lambda)}=0$；

$$\alpha_k^{(\lambda)}=\sum_{i=0}^{k-1}(\Delta\mu(t_{i-1}))^2, 2\leqslant k\leqslant n+1;$$

$$\alpha_k^{(\lambda)}=\alpha_{n+1}^{(\lambda)}, n+2\leqslant k.$$

让 $\mathscr{F}_k^{(\lambda)}=\mathscr{F}_{t_k},0\leqslant k\leqslant n;\mathscr{F}_k^{(\lambda)}=\mathscr{F}_{t_n},n<k$. 则 $\alpha_k^{(\lambda)},k\geqslant 0$,为一个关于 $\mathscr{F}_k^{(\lambda)},k\geqslant 0$ 的可料可积增序列. 令

$$\zeta_k^{(\lambda)}=E(\alpha_\infty^{(\lambda)}/\mathscr{F}_k^{(\lambda)})-\alpha_k^{(\lambda)},k\geqslant 0, \tag{6.3.13}$$

则 $\zeta^{(\lambda)}_{\cdot}$ 为关于 $\mathscr{F}^{(\lambda)}_{\cdot}$ 的势. 注意:$\alpha_\infty^{(\lambda)}=\alpha_{n+1}^{(\lambda)}=\sigma_\lambda{}^2(u)$. 因此,按定理5.4.2 如果势族$\{\zeta^{(\lambda)}_{\cdot},\lambda\}$满足条件(5.4.2),则$\{\alpha_\infty^{(\lambda)},\lambda\}$一致可积,而这正是所要求的结果.

现在,证明:$\{\zeta^{(\lambda)}_{\cdot},\lambda\}$满足条件(5.4.2).

我们将上标"(λ)"简单地用"·"表示. 显然有

$$\zeta_0^{\cdot}=E(\alpha_{n+1}^{\cdot}/\mathscr{F}_0^{\cdot})=E(\mu^2(u)-\mu^2(0)/\mathscr{F}_0^{\cdot})\leqslant E(\mu^2(u)/\mathscr{F}_0^{\cdot}),$$

$$\zeta_n^{\cdot}=E((\Delta\mu(t_{n-1}))^2/\mathscr{F}_n^{\cdot})=(\Delta\mu(t_{n-1}))^2\leqslant 4\sup\{\mu^2(s),0\leqslant s\leqslant u\},\zeta_k^{\cdot}=0\quad(n<k),$$

$$\begin{aligned}\zeta_k^{\cdot}&=E(\alpha_{n+1}^{\cdot}-\alpha_k^{\cdot}/\mathscr{F}_k^{\cdot})=E\Big(\sum_{i=k}^{n}(\Delta\mu(t_{i-1}))^2/\mathscr{F}_k^{\cdot}\Big)\\&=(\Delta\mu(t_{k-1}))^2+\sum_{i=k+1}^{n}E(\mu^2(t_i)-\mu^2(t_{i-1})/\mathscr{F}_k^{\cdot})\\&=(\Delta\mu(t_{k-1}))^2-\mu^2(t_k)+E(\mu^2(\mu)/\mathscr{F}_u^{\cdot})\\&\leqslant E(\mu^2(\mu)/\mathscr{F}_k^{\cdot})+4\sup\{\mu^2(s),0\leqslant s\leqslant u\}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1).\end{aligned}$$

归纳起来,有

$$\zeta_k^{\cdot}\leqslant E(\mu^2(\mu)/\mathscr{F}_k^{\cdot})+4\cdot\sup\{\mu^2(s),0\leqslant s\leqslant u\}\quad(k\geqslant 0).$$

注意到 $\zeta_k^{\cdot}$ 是 $\mathscr{F}_k^{\cdot}$-可测的. 那么上述不等式可推出:

$$\zeta_k^{\cdot}\leqslant 5\cdot E(\sup_s\mu^2(s)/\mathscr{F}_k^{\cdot})\quad(k\geqslant 0). \tag{6.3.14}$$

因为 $\mu(\cdot)\in M_2$ 意味着:$\sup\limits_s\mu^2(s)\in L_1$,故(6.3.14)式表明:$\zeta_k^{(\lambda)}$ 关于参数 k 和 λ 均是一致可积的. 从而,条件(5.4.2)式成立. 这就完成了结论之证.

定理 6.3.4 设 $\mu(\cdot)\in M_2^c$,则对$\forall u\in\mathbf{R}^+$,$\mu(\cdot)$在$[0,u]$上的二次变差存在,且与其特征(a.c)一致,即

$$[\mu,\mu]u=\langle\mu,\mu\rangle u\quad(\text{a.c}). \tag{6.3.15}$$

证 分二步证明这个结论.

第一步，若 $\mu(\cdot)$ 及其特征有界，则结论成立．

令 $\alpha(s)=\langle\mu,\mu\rangle s, s\in[0,u]$，则

$$E(\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u))^2=E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}((\Delta\mu(t_i))^2-\Delta\alpha(t_i))\Big]^2$$

$$=\sum_{i,j=0}^{n-1}E[(\Delta\mu(t_i))^2-\Delta\alpha(t_i)]$$

$$\cdot[(\Delta\mu(t_j))^2-\Delta\alpha(t_j)].$$

对于 $i\neq j$，例如，$i<j$，利用(6.2.4)式，可得

$$E[(\Delta\mu(t_i))^2-\Delta\alpha(t_i)]\cdot[(\Delta\mu(t_j))^2-\Delta\alpha(t_j)]$$

$$=E[((\Delta\mu(t_i))^2-\Delta\alpha(t_i))\cdot E((\Delta\mu(t_j))^2-\Delta\alpha(t_j)]/\mathscr{F}_{t_j}$$

$$=0.$$

于是，

$$E(\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u))^2=\sum_{i=0}^{n-1}E[(\Delta\mu(t_i))^2-\Delta\alpha(t_i)]^2$$

$$\leqslant 2E\Big[\sum_{i=0}^{n-1}((\Delta\mu(t_i))^4+(\Delta\alpha(t_i))^2)\Big]$$

$$\leqslant 2E[\|\Delta\mu\|_\lambda^2\cdot\sigma_\lambda^2(u)+\|\Delta\alpha\|_\lambda\alpha(u)],\tag{6.3.16}$$

其中，$\|\Delta\mu\|_\lambda^2=\sup_i\{|\Delta\alpha(t_i)|^2\}$；$\|\Delta\alpha\|_\lambda=\sup_i\{|\Delta\alpha(t_i)\}$.

这一步假定了 $\mu(\cdot),\alpha(\cdot)$ 有界，即 $\exists\ C^2<\infty$，使得

$$\|\Delta\mu\|_\lambda^2\leqslant 4C^2,\alpha(u)\leqslant C^2.$$

于是，按引理 6.3.4，$\{\|\Delta\mu\|_\lambda^2\cdot\sigma_\lambda^2(u),\lambda\}$ 一致可积，显然，$\{\alpha(u)\cdot\|\Delta\alpha\|_\lambda,\lambda\}$ 一致可积，又 $\mu(\cdot)\in M_2^C$ 更有 $\mu(\cdot)$ 拟左连续．从而其特征 $\alpha(\cdot)$ 连续，于是

$$\text{a.c-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}(\|\Delta\mu\|_\lambda^2\cdot\sigma_\lambda^2(u)+\|\Delta\alpha\|_\lambda\cdot\alpha(u))=0,$$

故应用 Lebesgue 收敛定理可推出：(6.3.16)式的右边当 $\|\lambda\|\to 0$ 时有极限 0. 从而，$\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}E(\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u))^2=0$. 由此即得

$$P(|\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u)|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}E(\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u))^2\xrightarrow[\|\lambda\|\to 0]{}0$$

$$(\forall\ \varepsilon>0).$$

第二步，取消有界性假定后，结论亦真．

设 $C\in\mathbf{R}^+\setminus\{0\}$. 定义 $\alpha(s)=\langle\mu,\mu\rangle_s$;

$\tau=\tau_c=\inf\{s:|\mu(s)|^2\vee\alpha(s)\geqslant C^2, s\in[0,u]\}$, $\mathrm{imf}\Phi=u$.

显然，τ 为 $\{\mathscr{F}s, 0\leqslant s\leqslant u\}$ 时，且由 $\mu(\cdot)$ 和 $\alpha(\cdot)$ 的连续性，有

当 $C\uparrow\infty$ 时，$P(\tau<u)\leqslant P(\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant u}|\mu(s)|\geqslant C\}\cup\{\alpha(u)\geqslant C^2\})\to 0$.

令 $\bar{\mu}(s)=\mu(s\wedge\tau)$, $\bar{\alpha}(s)=\alpha(s\wedge\tau)$，则由右闭鞅停时代换的不变性可知：$\bar{\mu}(\cdot)$ 为鞅，且 $\bar{\mu}(\cdot)\in M_2^c$. 此外，由 $\mu(\cdot)$ 和 $\alpha(\cdot)$ 的连续性，有 $|\bar{\mu}(s)|\leqslant C$, $\bar{\alpha}(s)\leqslant C^2$，且 $\bar{\alpha}(\cdot)$ 为 $\bar{\mu}(\cdot)$ 的特征．令 $B_\lambda=\{|\sigma_\lambda^2(u)-\alpha(u)|>\varepsilon\}$，则

$$
\begin{aligned}
P(B_\lambda)&=P(B_\lambda\cap(\tau=u))+P(B_\lambda\cap(\tau<u))\\
&\leqslant P(|\bar{\sigma}_\lambda{}^2(u)-\bar{\alpha}(u)|>\varepsilon)+P(\tau<u).
\end{aligned}
$$

对 $\forall\ \delta>0$, $\exists$ 足够大的 C，使得 $P(\tau<u)<\delta$. 对此 C，按第一步所得结果，有：$\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}P(|\bar{\sigma}_\lambda{}^2(u)-\bar{\alpha}(u)|>\varepsilon)=0$. 于是，$\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}P(B_\lambda)\leqslant\delta(\forall\ \varepsilon>0,\delta>0)$，故 $\mathrm{P}\text{-}\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}\sigma_\lambda^2(u)=\alpha(u)$.

推论 6.3.4 设 $\mu_i(\cdot)\in M_2^c, i=1,2$. $u\in\mathbf{R}^+$. 令

$$
[\mu_1,\mu_2]_u=\mathrm{P}\text{-}\lim_{\|\lambda\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\mu_1(t_i)\cdot\Delta\mu_2(t_i), \qquad (6.3.17)
$$

则
$$
[\mu_1,\mu_2]_u=\langle\mu_1,\mu_2\rangle_u \quad (\text{a.c}).
$$

证 按照联合特征之定义及定理 6.3.4，有

$$
\begin{aligned}
\langle\mu_1,\mu_2\rangle_u&=\frac{1}{2}[\langle\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2\rangle_u-\langle\mu_1,\mu_1\rangle_u-\langle\mu_2,\mu_2\rangle_u]\\
&=\frac{1}{2}[\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2]_u-[\mu_1,\mu_1]_u-[\mu_2,\mu_2]_u\\
&=[\mu_1,\mu_2]_u.
\end{aligned}
$$

定理 6.3.5 设 $\mu(\cdot)\in M_2$, $\mu(0)=0$，且 $\mu(\cdot)$ 拟左连续，则对 $\forall\ t\in T_\infty$ 及 $\varepsilon>0, N>0$，有

$$
P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mu(s)|>\varepsilon)\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\langle\mu,\mu\rangle t\geqslant N). \qquad (6.3.18)
$$

证 定义：$\tau=\tau_\varepsilon=\inf\{s:\langle\mu,\mu\rangle_s\geqslant N, 0\geqslant s\geqslant t\}$, $\inf\varphi=t$，则 τ 为 $\{\mathscr{F}_s, 0\leqslant s\leqslant t\}$ 时，按照定理 6.3.1，$\mu(\cdot)$ 的特征连续．从而，

$\langle\mu,\mu\rangle_{s\wedge\tau}\leqslant N \quad (s\in[0,t])$. $\langle\mu,\mu\rangle_\tau=N$. 令
$B_t=\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|\mu(s)|>\varepsilon\}$，则由 τ 之定义及特征的单调性，有

$$P(Bt)=P(Bt\cap(\tau<t))+P(Bt\cap(\tau=t))$$
$$\leqslant P(\tau<t)+P(B\tau).$$
$$P(B\tau)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot E(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}|\mu(s)|^2)$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}E(\mu^2(\tau)) \quad (\text{利用公式}(6.2.5))$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E(\mu(\tau)-\mu(0))^2$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E(\langle\mu,\mu\rangle_\tau)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}N,$$
$$P(\tau<t)\leqslant P(\langle\mu,\mu\rangle_t\geqslant N),$$

故
$$P(Bt)\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\langle\mu,\mu\rangle_t\geqslant N).$$

注　此定理在随机积分理论中有特别重要的应用，这里虽假定 $\mu(0)=0$，但此条件很容易满足．这只要让 $\bar{\mu}(\cdot)=\mu(\cdot)-\mu(0)$，就可对 $\bar{\mu}(\cdot)$采用定理 6.3.5.

§4　局部平方可积鞅

本节仍假设 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$，$t\in T_\infty$．在 Doob-Meyer 定理中要求上鞅属于类[D]，这个条件是很苛刻的，它把许多重要的随机过程，例如 Wiener 过程排斥在外．Wiener 过程是一个连续鞅，却不是平方可积鞅，即由它的平方产生的下鞅不属于类[D]，因此，有必要将平方可积鞅的理论推广到更一般的情形．

定义 6.4.1　如果随机过程$\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$满足下列条件：

(i)样本函数以概率 1 右连左极；

(ii)∃ 一个 $\mathscr{F}_\cdot$-时列 τ_n，$n\geqslant1$，使得

$\tau_n\uparrow\infty$当 $n\uparrow\infty$时，且

对$\forall\ n\geqslant 1$，过程$\{\zeta(t\wedge\tau_n),\mathscr{F}_t\wedge\tau_n,t\in T_\infty\}$属于类$[D]$，则称此过程为局部过程；称$\tau_n,n\geqslant 1$，为此过程的完全弱化停时列；称每个$\tau_n$为此过程的弱化停时；由弱化停时产生的过程称为弱化过程．用符号$[LD]$表示局部过程的全体．

本节不讨论一般的局部过程，如果随机过程$\zeta(\cdot)$的所有弱化过程为半鞅，则称此过程为局部半鞅．用LM和LM^C分别表示局部鞅和局部连续鞅之全体．LM_2和LM_2^C分别表示局部平方可积鞅和局部连续平方可积鞅之全体．显然，后者被含于前者中．LN和LN^C分别表示局部可料可积增过程和局部连续可料可积增过程之全体．

引理 6.4.1 设$\zeta(\cdot)\in[LD]$，$\tilde{\tau}_n,n\geqslant 1$，为其弱化停时列，且$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\tau}_n=\infty$ (a.c)．令

$$\tau_n=\max_{i\leqslant k\leqslant n}\tilde{\tau}_k,n\geqslant 1,\tag{6.4.1}$$

则$\tau_n,n\geqslant 1$，为此过程的完全弱化停时列．

证 令$\tilde{\zeta}_n(t)=\zeta(t\wedge\tilde{\tau}_n),t\in T_\infty$，则按定义 6.4.1，$\tilde{\zeta}_n(\cdot)\in[D]$.

记 $\zeta_n(t)=\zeta(t\wedge\tau_n),t\in T_\infty$，则

$$\zeta_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\tilde{\zeta}_k(t)\cdot\chi_{(\gamma=k)},\tag{6.4.2}$$

其中，$\gamma=\inf\{k:\tau_n=\tilde{\tau}_k,i\leqslant k\leqslant n\}$.

显然，(6.4.2)式右边和中的每一项都属于类$[D]$，而类$[D]$为线性类，故$\zeta_n(\cdot)\in[D]$．从而τ_n为弱化停时．

引理 6.4.2 设$\zeta(\cdot)\in[LD]$，且$\tau.,\sigma.$为此过程的两个完全弱化停时列，令

$$\gamma_n^{(1)}=\tau_n\wedge\delta_n,\gamma_n^{(2)}=\tau_n\vee\delta_n(n\geqslant 1),\tag{6.4.3}$$

则$\gamma_\cdot^{(i)}$亦为此过程的完全弱化停时列 $(i=1,2)$.

证 注意：$\tau_n\uparrow\infty,\sigma_n\uparrow\infty$．因此，由(6.4.3)式定义的$\gamma_\cdot^{(i)}$亦具类似的性质：$\gamma_n^{(i)}\uparrow\infty$ $(i=1,2)$．如果

$$\zeta^{(1)}(t)=\zeta(t\wedge\tau_n),\zeta^{(2)}(t)=\zeta(t\wedge\sigma_n),(t\in T_\infty),$$

那么

$$\zeta^{(i)}(\cdot)\in[D].\ \text{令}\ \zeta_{(i)}(t)=\zeta(t\wedge\gamma_n^{(i)})\quad(t\in T_\infty, i=1.2).$$

$$\zeta_{(i)}(t)=\begin{cases}\zeta^{(1)}(t)\cdot\chi_{(\tau_n<\sigma_n)}+\zeta^{(2)}(t)\cdot\chi_{(\tau_n\geqslant\sigma_n)}, i=1;\\ \zeta^{(2)}(t)\cdot\chi_{(\tau_n<\sigma_n)}+\zeta^{(1)}(t)\cdot\chi_{(\tau_n\geqslant\sigma_n)}, i=2.\end{cases}$$

由此即知：$\zeta_{(i)}(\cdot)\in[D]\quad(i=1,2)$.

引理 6.4.3 若随机过程$\{\zeta(t),\mathscr{F}_t,t\in T_\infty\}$连续，则

$$\zeta(\cdot)\in[LD].$$

证 对$\forall\ n\geqslant1$，定义

$$\tau_n=\inf\{t:|\zeta(t)|\geqslant n\},\inf\varphi=\infty.$$

显然，τ_n 为 $\mathscr{F}_\cdot$-时，由于$\zeta(t)$为 r.v.，且$\zeta(t),t\in T_\infty$，连续，而必有$\tau_n\uparrow\infty$；$|\zeta(t\wedge\tau_n)|\leqslant n\quad(t\in T_\infty)$. 于是，$\zeta_n(\cdot)\in[D]$，其中

$$\zeta_n(t)=\zeta(t\wedge\tau_n),t\in T_\infty,$$

故 $\tau_n,n\geqslant1$，为$\zeta(\cdot)$的一个完全弱化停时列．

定理 6.4.1 （Riesz-Doob-Meyer 定理的推广） 若$\xi(\cdot)$为非负局部上鞅，则此过程可唯一地被分解成如下形式

$$\xi(t)=\mu(t)-\alpha(t),t\in T_\infty, \tag{6.4.4}$$

其中，$\mu(\cdot)\in LM;\alpha(\cdot)\in LN$.

证 设 $\tau_n,n\geqslant1$，为$\xi(\cdot)$的完全弱化停时列．令$\xi_n(t)=\xi(t\wedge\tau_n),t\in T_\infty$，则$\xi_n(\cdot)\in[D]$，且为非负上鞅．于是按 Riesz-Doob-Meyer 定理，有

$$\xi_n(t)=\mu_n(t)-\alpha_n(t),t\in T_\infty, \tag{6.4.5}$$

其中，$\mu_n(\cdot)$为右闭鞅；$\alpha_n(\cdot)$为可料可积增过程．

若$t\leqslant\tau_n$，则对可有的$m>n$，有

$$\xi(t)=\xi_n(t)=\xi_m(t).$$

因此，按 R.-D.-M. 分解的唯一性，对$\forall\ m>n$，必有

$$\mu_n(t)=\mu_m(t),\alpha_n(t)=\alpha_m(t),\quad(t\leqslant\tau_n).$$

因为$\tau_n\uparrow\infty$，故下列极限存在

$$\mu(t)=\text{a. c-}\lim_{n\to\infty}\mu_n(t);\alpha(t)=\text{a. c-}\lim_{n\to\infty}\alpha_n(t),t\in T_\infty, \tag{6.4.6}$$

$$\xi(t)=\mu(t)-\alpha(t).$$

首先证明：$\alpha(\cdot)\in LN$.

事实上，对$\forall\ s\in T_\infty$，$\alpha(s\wedge\tau_n)=\text{a.c-}\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_m(s\wedge\tau_n)=\alpha_n(s\wedge\tau_n)$.
注意：$\alpha_n(\cdot)$为可料可积增过程．故按照推论 5.5.1，$\alpha_n(s\wedge\tau_n)$，$s\in T_\infty$，为可料可积增过程．从而 $\alpha(s\wedge\tau_n)$，$s\in T_\infty$，为可料可积增过程．

其次：证明：$\mu(\cdot)\in LM$. 事实上，

$$\begin{aligned}\mu(t\wedge\tau_n)&=\xi(t\wedge\tau_n)+\alpha(t\wedge\tau_n)\\&=\text{a.c-}\lim_{m\to\infty}(\xi_m(t\wedge\tau_n)+\alpha_m(t\wedge\tau_n))\\&=\xi_n(t\wedge\tau_n)+\alpha_n(t\wedge\tau_n)=\mu_n(t\wedge\tau_n).\end{aligned}$$

由右闭鞅停时代替的不变性知：$\mu_n(t\wedge\tau_n)$，$t\in T_\infty$，仍为右闭鞅，故

$$\mu(\cdot)\in LM.$$

最后证明分解的唯一性．

设 τ_n'，$n\geqslant1$，为另一完全弱化停时列，并得到相应的分解：$\xi(t)=\mu'(t)-\alpha'(t)$，$t\in T_\infty$，令 $\gamma_n=\tau_n\wedge\tau_n'$，$n\geqslant1$，则由引理 6.4.2 知；$\gamma_n$，$n\geqslant1$，亦为此过程的完全弱化停时列．于是，相应此 γ. 可得分解式

$$\xi(t)=\bar{\mu}(t)-\bar{\alpha}(t),t\in T_\infty.$$

再一次应用 R.-D.-M. 分解的唯一性即可推出：

$$\mu(t)=\bar{\mu}(t)=\mu'(t),\alpha(t)=\bar{\alpha}(t)=\alpha'(t)\quad(t\leqslant\gamma_n).$$

故对$\forall\ t\in T_\infty$，有

$$\mu(t)=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\bar{\mu}(t\wedge\gamma_n)=\mu'(t).$$
$$\alpha(t)=\text{a.c-}\lim_{n\to\infty}\bar{\alpha}(t\wedge\gamma_n)=\alpha'(t).$$

推论 6.4.1 设 $\mu_i(\cdot)\in[LM_2]$ $(i=1,2)$. τ 为它们的一个共同弱化停时．那么

(i)$\mu_i^2(\cdot)$可唯一地分解为

$$\mu_i^2(t)=\nu_i(t)+\alpha_i(t)\quad(t\in T_\infty,i=1.2),$$

其中，$\nu_i(\cdot)\in LM$；$\alpha_i(\cdot)\in LN$；

(ii)$(\mu_1\cdot\mu_2)(\cdot)$可唯一地分解为

$$\mu_1(t)\cdot\mu_2(t)=\nu_{12}(t)+\alpha_{12}(t)\quad(t\in T_\infty),$$

其中，

$$\nu_{12}(\cdot)\in[LM];\alpha_{12}(t)=\frac{1}{2}(\beta_1(t)-\beta_2(t)),\beta_i(\cdot)\in[LN],$$
$$i=1,2.$$

证 此结论是上述定理的特例．

定理 6.4.2 若$\mu(\cdot)\in LM^C$，则对$\forall\ t\in T_\infty$，其二次变差与局部特征(a.c)相等，即

$$[\mu,\mu]_t=\langle\mu,\mu\rangle_t\quad(\text{a.c}).$$

证 首先证明：$\mu(\cdot)\in LM_2^C$.

事实上，$\mu(\cdot)\in LM_2^C$ 表明：$\exists$ 停时列 $\tau_n,n\geqslant1$，使得 $\tau_n\uparrow\infty$，且对$\forall\ n\geqslant1,\mu_n'(t)=\mu(t\wedge\tau_n),t\in T_\infty$，为右闭连续鞅．现定义

$$\sigma_m^{(n)}=\inf\{t:|\mu_n'(t)|\geqslant m\},\inf\varphi=\infty,$$

则对$\forall\ m\geqslant1,\sigma_m^{(n)}$ 为$\{\mathscr{F}_t\wedge t_n,t\in T_\infty\}$一时，且 $\sigma_m^{(n)}\uparrow\infty$，$|\mu_n'(t\wedge\sigma_m^{(n)})|\leqslant m$. 对$\forall\ n\geqslant1$，令

$$\gamma_n=\tau_n\wedge\sigma_m^{(n)},\mu_n(t)=\mu(t\wedge\gamma_n)\quad(t\in T_\infty),\tag{6.4.7}$$

则 $\gamma_n\uparrow\infty$，且 $\mu_n(\cdot)$为连续的平方可积鞅$(n\geqslant1)$. 故 $\mu(\cdot)\in LM_2^C$.

最后证明定理的结论．

按照定理 6.3.5，对$\forall\ n\geqslant1$，有$[\mu_n,\mu_n]_t=\langle\mu_n,\mu_n\rangle_t$，这里 $\mu_n(\cdot)$由(6.4.7)定义，且 $\mu_n(\cdot)\in M_2$. 注意，如果对固定的 ω，让 $t\wedge\gamma_n$ 总为关于区间$[0,t]$的分割 λ 的一个分点，记这样的 λ 为 λ'，则由 $\mu(\cdot)$和 $\mu_n(\cdot)$的连续性可知：

$$[\mu,\mu]_t=\lim_{\|\lambda'\|\to0}\sigma_{\lambda'}^2(t)\geqslant\lim_{\|\lambda'\|\to0}\sigma_{\lambda',n}^2(t)=[\mu_n,\mu_n]_t\quad(n\geqslant1).$$

注意：若$\langle\mu,\mu\rangle_t=\infty$，则$[\mu,\mu]_t=\infty$. 因此，仅需证明：$[\mu,\mu]_t=\langle\mu,\mu\rangle_t$，(a.c)，于 $At=\{\langle\mu,\mu\rangle_t<\infty\}$上．

令 $\alpha(t)=\langle\mu,\mu\rangle_t$. 估计如下概率

$$P(|\sigma_\lambda^2(t)-\alpha(t)|\cdot\chi_{(\alpha(t)<\infty)}>\varepsilon)$$

$$\leqslant P(\chi_{(\alpha(t)<\infty)}\cdot|\sum_{k=0}^{m-1}[(\Delta\mu(t_k))^2-(\Delta\mu_n(t_k))^2]|>\frac{\varepsilon}{3})$$

$$+P(\chi_{(\alpha(t)<\infty)}\cdot|\sum_{k=0}^{m-1}(\Delta\mu_n(t_k))^2-\alpha_n(t)|>\frac{\varepsilon}{3}). \quad (6.4.8)$$

显然,(6.4.8)式右边的第一项$\leqslant P(\gamma_n<\infty)$. 于是,对$\forall\ \delta>0$,$\exists\ n=n(\delta)\geqslant 1$,使得(6.4.8)式右边的第一和第三两项均小于$\frac{1}{2}\delta$,对此 n,(6.4.8)式右边的第二项$\overline{\|\lambda\|}\to 0$. 故

$$\lim_{\|\lambda\|\to 0} P(\chi_{((\alpha(t)<\infty)}\cdot|\sigma_\lambda^2(t)-\alpha(t)|>\varepsilon)\leqslant\delta.$$

从而,P-$\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}\sigma_\lambda^2(t)=\alpha(t)$.

定理 6.4.3 设 $\mu(\cdot)\in LM_2$,$\mu(0)=0$,且 $\mu(\cdot)$局部拟左连续,则对$\forall\ \varepsilon>0$ 和 $N>0$,有

$$P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\mu(s)|>\varepsilon)\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\langle\mu,\mu\rangle t\geqslant N)\quad(t\in T_\infty).$$

$$(6.4.9)$$

证 由定理的条件及引理 6.4.2 知:存在完全弱化停时列 τ_n, $n\geqslant 1$,使得 $\mu_n(t)=\mu(t\wedge\tau_n)$,$t\in T_\infty$,为拟左连续的平方可积鞅. 于是,按照定理 6.3.1,$\mu_n(\cdot)$的特征 $\alpha_n(\cdot)$连续. 令 $\alpha(t)=\text{a. c-}\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(t)$,则 $\alpha(\cdot)$为 $\mu(\cdot)$的局部特征. 让 $B_t=\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|\mu(s)|>\varepsilon\}$, $B_t^{(n)}=\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|_n(s)|>\varepsilon\}$,则由定理 6.3.5, $P(B_t^{(n)})\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\alpha(t)\geqslant N)\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\alpha_n(t)>N)$,于是

$$P(B_t)=P(B_t\cap(t\leqslant\tau_n))+P(B_t\cap(t\leqslant\tau_n))$$
$$\leqslant P(B_t^{(n)})+P(t>\tau_n)$$
$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\alpha(t)\geqslant N)+P(t>\tau_n).$$

注意,当 $n\to\infty$时 . $P(t>\tau_n)\to 0$,故

$$P(B_t)\leqslant\frac{N}{\varepsilon^2}+P(\alpha(t)\geqslant N)\quad(t\in T_\infty).$$

第七章　参数估计中的鞅方法

本章研究一类线性模型的参数估计问题．利用鞅论中的某些结果，获得了强相容估计的一些条件，并用鞅收敛的方法讨论了多维线性控制系统中参数矢量估计的相容性．

§1　单参数估计的相容性[28]

设 $\xi=\{\xi_k\}(k\geqslant 1)$ 为独立的随机变量序列，$E\xi_k=0, V_k=E\xi_k^2>0$. 考虑一阶线性模型

$$y_{k+1}=\theta y_k+\xi_{k+1}\quad(k\geqslant 0).\tag{7.1.1}$$

这里假设 y_0 独立于 ξ，$\theta\in R$ 为待估参数．设

$$\mathscr{F}_k=\sigma(y_0,\xi_1,\cdots,\xi_k)\quad(k\geqslant 1);\mathscr{F}_0=\sigma(y_0),$$

则 $\hat{\theta}_n=\varphi(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ 是第 n 次采样的观测信息所决定的关于真值 θ 的一个估计．令

$$\hat{y}_{k+1}=\hat{\theta}_k y_k(k=0,1,\cdots,n-1),$$

设 $C=\{c_k\}_k(k\geqslant 0)$ 为正实数列，使损失函数

$$V(\hat{\theta}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k E(y_{k+1}-\hat{y}_{k+1})^2\quad(n\geqslant 1)$$

达到最小值的 $\hat{\theta}_n$ 称为参数 θ 的最小方差估计．

现讨论 θ 与 $\hat{\theta}_n$ 之间的关系．设 $\delta\hat{\theta}_n$ 是任意 $\mathscr{F}n$-可测的 r.v，则

$$V(\hat{\theta}_n+\delta\hat{\theta}_n)-V(\hat{\theta}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k[E(y_{k+1}-(\hat{\theta}_n+\delta\hat{\theta}_n)y_k)^2 -E(y_{k+1}-\hat{\theta}_n y_k)^2]$$

$$=-2E\Big[\sum_{k=0}^{n-1}c_k(y_k\xi_{k+1}+(\theta-\hat{\theta}_n))y_k^2\delta\hat{\theta}_n\Big]+\sum_{k=0}^{n-1}c_kE(y_k^2\delta\hat{\theta}_n).$$

因此，$\delta V(\hat{\theta}_n)=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}c_k(y_k\xi_{k+1}+(\theta-\hat{\theta}_n)y_k^2)=0(\text{p-a.s.})$，

$$\Rightarrow\hat{\theta}_n-\theta=\frac{M_n}{A_n},$$

故
$$\hat{\theta}_n=\theta+\frac{M_n}{A_n},\tag{7.1.2}$$

其中

$$M_n=\sum_{i=0}^{n-1}c_ky_k\xi_{k+1},A_n=\sum_{i=0}^{n-1}c_ky_k^2(n\geqslant 1).\tag{7.1.3}$$

定义 7.1.1 若估计 $\hat{\theta}_n(n\geqslant 1)$ 以概率 1 收敛于真值 θ，即 $P\{\lim\limits_{n\to 0}\hat{\theta}_n=\theta\}=1$，则称估计 $\hat{\theta}_n$ 是强相容的．

将(7.1.1)式代入(7.1.2)式，得

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1}c_ky_ky_{k+1}.\tag{7.1.4}$$

下面讨论由公式(7.1.4)所作出的估计 $\hat{\theta}_n$ 的相容性．

引理 7.1.1 设 $M_0=0,M_n(n\geqslant 1)$ 由(7.1.3)式给出．且 $M=\{M_n,\mathscr{F}_n\}n\geqslant 0$ 为平方可积鞅，则其特征为

$$\langle M,M\rangle_n=\langle M_n,M_n\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}c_k^2V_{k+1}y_k^2(n\geqslant 1),$$

其中，$V_k=E\xi_k^2(k=1,2,\cdots)$.

证 若 $\Delta M_{k+1}=M_{k+1}-M_k,\Delta\langle M,M\rangle_{k+1}$

$$=E((\Delta M_{k+1})^2/\mathscr{F}_k),$$

则
$$E(\Delta M_{k+1}/\mathscr{F}_k)=0,$$

$$\Delta\langle M,M\rangle_{k+1}=E(c_k^2y_k^2\xi_{k+1}^2/\mathscr{F}_k)=c_k^2V_{k+1}y_k^2(\text{p-a.s.}),$$

故有
$$\langle M,M\rangle_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\langle M,M\rangle_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}c_k^2V_{k+1}y_k^2(\text{p-a.s.}).$$

引理 7.1.2 (Toeplite)设 $\{a_n\}$ 为非负实数列．$b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i,b_n$

$>0(n\geq 1)$，$b_n\uparrow\infty$，$n\to\infty$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\to x(n\to\infty).$$

特别，若 $a_n=1$，则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to x(n\to\infty).$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1$，当 $n>N_1$ 时，恒有$|x_n-x|<\varepsilon/2$. 选 $n_1>N_1$，使

$$\frac{1}{b_{n_1}}\sum_{i=1}^{N_1}|x_i-x|<\varepsilon/2,$$

则当 $n>n_1>N_1$ 时，便有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-x\right|&\leqslant\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i-x|\\&=\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{N_1}a_i|x_i-x|+\frac{1}{b_n}\sum_{i=N_1+1}^{n}a_i|x_i-x|\\&\leqslant\frac{1}{b_{n_1}}\sum_{i=1}^{N_1}a_i|x_i-x|+\frac{b_n-b_{N_1}}{b_n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$ #

引理 7.1.3 （Kronecker） 设$\{b_n\}$为单调增加正数列，$b_n\uparrow\infty$，$n\to\infty$，设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i=0$.

证 设 $b_0=0$，$S_0=0$，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\to S(n\to\infty)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\sum_{i=1}^{n}b_i(S_i-S_{i-1})=b_nS_n-b_0S_0-\sum_{i=1}^{n}S_{i-1}(b_i-b_{i-1}),$$

故

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=S_n-\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_iS_{i-1},$$

其中，$a_i=b_i-i-1b_i-1$. 由引理 7.1.2，$\frac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iS_{i-1}\to S(n\to\infty)$，

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i x_i=0$.

定理 7.1.1 在估计式(7.1.4)中，若 $y_0\neq 0, A_\infty=+\infty$ (p-a.s.)·$\sup\limits_{k\geqslant 1}\{c_k V_k\}<+\infty$，则估计 $\hat{\theta}_n$ 是强相容的.

证 设 $m_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\Delta M_i}{A_i}$，则

$$\langle m\rangle_n=\langle m_n,m_n\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{E[(\Delta M_i)^2/\mathscr{F}_{i-1}]}{A_i^2},$$

故由假设条件得

$$\langle m\rangle_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E[(\Delta M_i)^2/\mathscr{F}_{i-1}]}{A_i^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_{i-1}^2 y_{i-1}^2 V_i}{A_i^2}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_{i-1}y_{i-1}^2}{A_i^2}\sup_k\{c_{k-1}V_k\}<+\infty\text{(p-a.s.)}.$$

因此根据文献[1]第四章§3，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta M_n}{A_n}<+\infty$(p-a.s.)，从而由 Kronecker 引理知，$\frac{M_n}{A_n}\to 0$(p-a.s.)，故由(7.1.2)式得

$$P(\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta)=1. \qquad \#$$

若选权系数 $c_k=\frac{1}{V_{k+1}}$，则由引理 7.1.1 知，$A_n=\langle M\rangle_n$. 于是，(7.1.2)式变为

$$\hat{\theta}_n=\theta+\frac{M_n}{\langle M\rangle_n}(n\geqslant 1). \qquad (7.1.5)$$

从而得到下面的推论.

推论 7.1.1 若$\langle M\rangle_\infty=+\infty$(p-a.s.)，则由(7.1.5)式所决定的估计 $\hat{\theta}_n$ 是强相容的.

现讨论使 M 的特征满足$\langle M\rangle_\infty=+\infty$的条件.

定理 7.1.2 若 $\sup\limits_n\frac{V_{n+1}}{V_n}<+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\frac{\xi_n^2}{V_n}\Lambda_1)=\infty$，则 $\langle M\rangle_\infty=+\infty$ (p-a.s.).

证 由(7.1.1)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^2}{V_k}\wedge 1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^2}{V_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y_k-\theta y_{k-1})^2}{V_k}$$

$$\leqslant 2(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k^2}{V_k}+\theta^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_{k-1}^2}{V_k})$$

$$\leqslant 2(\sup_k(\frac{y_{k-1}}{V_k})+\theta^2)\langle M\rangle_\infty.$$

由 Kolmogorov 级数收敛定理[1]知

$$\sum_{k=1}^{\infty}E(\frac{\xi_k^2}{V_k}\wedge 1)=\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^2}{V_k}\wedge 1=\infty\quad(\text{p-a.s.}),$$

于是由假设条件得$\langle M\rangle_\infty=+\infty$(p-a.s.). #

引理 7.1.4 设 $\beta=\{\beta_k\}k\geqslant 1$ 为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 Gauss 序列,则

$$P\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2<+\infty\}=1\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}E\beta_k^2<+\infty.$$

证 $\Leftarrow E(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2)=\sum_{k=1}^{\infty}E\beta_k^2<+\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ 为 r.v.,

从而
$$P(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2<+\infty)=1.$$

$\Rightarrow$不妨设 $E\beta_k=0(k\geqslant 1)$,不难推出:

$$P\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2<+\infty\}=1\Rightarrow(E\exp(-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2))^{-2}<+\infty,\tag{7.1.6}$$

因此,若能证明

$$E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big)\leqslant\Big(E\exp\Big(-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big)\Big)^{-2},\tag{7.1.7}$$

则由(7.1.6)式知,$E(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2)<+\infty$.

下面证明不等式(7.1.7)成立.

因为对于 Gauss 序列 $\beta=\{\beta_k\},k\geqslant 1$,存在独立的 Gauss 变量 $\beta_{k,n}$,$1\leqslant k\leqslant r\leqslant n$,使

$$E\beta_{k,n}=0,\ \sum_{k=1}^{n}\beta_k^2=\sum_{k=1}^{r}\beta_{k,n}^2.$$

令 $\lambda_{k,n}=E\beta_{k,n}^2$，则 $\beta_{k,n}^2\sim N(0,\lambda_{k,n})$，于是有

$$E\exp\left(-\sum_{k=1}^{r}\beta_{k,n}^2\right)=\prod\exp(-\beta_{k,n}^2)=(1+2\lambda_{k,n}).$$

从而得

$$(E\exp-\sum_{k=1}^{r}\beta_{k,n}^2)^{-2}=\prod_{k=1}^{r}(1+2\lambda_{k,n})=1+2\prod_{k=1}^{r}\lambda_{k,n}+\cdots$$

故有 $$E\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2=E\sum_{k=1}^{r}\beta_{k,n}^2=\sum_{k=1}^{r}\lambda_{k,n}$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{r}(1+2\lambda_{k,n})\leqslant\left(E\exp\left(-\sum_{k=1}^{r}\beta_k^2\right)\right)^{-2}.$$

由 n 的任意性便得到不等式(7.1.7).

定理 7.1.3 设 $\xi=\{\xi_k\}k\geqslant 0$ 为独立的 Gauss r. v. 列，$E\xi_k=0,V_k=E\xi_k^2>0(k\geqslant 0)$，若

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{V_k}{V_{k+1}}=+\infty,\tag{7.1.8}$$

则对每个 $\theta\in\mathrm{R}$，由(7.1.5)式所决定的估计 $\hat{\theta}_n$ 是强相容的.

证 由推论 7.1.1 知，只要证明 $\langle M\rangle_\infty=\infty$ (p-a.s.)

令 $\eta_k=V_{k+1}^{-\frac{1}{2}}y_k$，则

$$\eta_k=V_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{\lambda}\theta^i\xi_{k-i}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i,k\xi_{k-i},$$

其中，$\alpha_{i,k}=V_{k+1}^{-\frac{1}{2}}\theta^i\xi_0=y_0$，因此 $\eta=\{\eta_k\}(k\geqslant 0)$ 为 Gauss r. v. 列，于是由引理 7.1.4 知

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^2<\infty\right\}=1\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}E\eta_k^2<\infty.$$

从而 $P\{\langle M,M\rangle\infty=\infty\}=P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^2=\infty\right\}=1\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}E\eta_k^2=\infty,$

于是问题转化为证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\eta_k^2 = \infty. \tag{7.1.9}$$

由于 $\sum_{k=0}^{\infty} E\eta_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_{i,k}\xi_{k-i}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\alpha_{i,k}^2 E\xi_{k-i}^2$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{\theta^{2i}}{V_{k+1}}V_{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{V_k}{V_{k+1}} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{V_k}{V_{k+1}}\theta^{2i},$$

故由条件(7.1.8)式即可推出条件(7.1.9)成立.

§2 多参数估计的相容性

这一节及下一节考虑多输入、多输出线性动力系统的参数估计问题. 本节利用鞅收敛理论讨论参数为实常矢量的最小二乘估计的相容性,其特点是条件相当温和(mild conditions),可用于一般的反馈系统[28].

设多维线性离散系统为

$$y(t) + \sum_{k=1}^{p} A_k y(t-k) = \sum_{j=1}^{q} B_j(t-j) + e(t). \tag{7.2.1}$$

其中,$y(\cdot)$是 n 维输出,$u(\cdot)$是 m 维输入,e 是扰动,在此称为方程残差. $A_k, B_j (k=1,2,\cdots,p, j=1,2,\cdots,q)$分别为 $n\times n$ 阶和 $n\times m$ 阶矩阵. $t=1,2,\cdots$. $y(k), u(k)$表示第 k 次采样值. 规定当 $k<0$ 时,$y(k)=u(k)=0$.

今欲从 $u(\cdot)$和 $y(\cdot)$的 N 次观测数据中估计出参数 A_k, B_j. 记

$$\varphi(t)^{\mathrm{T}} = [-y(t-1)^{\mathrm{T}} - y(t-2)^{\mathrm{T}} \cdots$$
$$-y^{\mathrm{T}}(t-p)u^{\mathrm{T}}(t-1)\cdots u^{\mathrm{T}}(t-q)] \quad (t=1,2,\cdots,N). \tag{7.2.2}$$

$$\Phi(t)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varphi(t)^{\mathrm{T}} & & & 0 \\ & \varphi(t)^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi(t)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{n\times[n\times p+m\times q]},$$

$$\theta^{\mathrm{T}} = [A_1 \cdots A_p B_1 \cdots B_q].$$

设 $\beta=\mathrm{Col}\theta$ 表示由 θ 中的列元素按从左到右的次序排列而成的矢量，则(7.2.1)式可写为

$$y(t)=\Phi(t)^{\mathrm{T}}\beta+e(t)\quad(t=1,2,\cdots,N).\tag{7.2.3}$$

引入损失函数

$$V(\beta)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}|y(t)-\Phi(t)^{\mathrm{T}}\beta|^{2},\tag{7.2.4}$$

则使由(7.2.4)式所决定的 $V(\beta)$ 达到最小值的估计量 $\hat{\beta}_N$ 称为 β 的最小二乘估计.

下面讨论最小二乘估计的相容性.

定理 7.2.1 设有线性系统(7.2.3)，其中 $\{e(t)\}$ 为一列独立同分布的随机矢量，且满足条件

$$E(e(t)|e(t-1),\cdots,e(0))=0,\tag{7.2.5}$$

$$E|(e(t)|^{2}|e(t-1),\cdots,e(0))<c,\tag{7.2.6}$$

$$u(t)\text{独立于 } e(t+1),e(t+2),\cdots\tag{7.2.7}$$

设 $\hat{\beta}_N$ 是 β 的最小二乘估计，β_0 是 β 的真值，$\tilde{\beta}_N=\hat{\beta}_N-\beta_0$，则

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}|\Phi^{\mathrm{T}}(k)\tilde{\beta}_N|^{2}<\infty\quad(\text{p-a.s.}).\tag{7.2.8}$$

证 设 $\mathscr{F}_t$ 是由 $\{e(0)u(0),\cdots,e(t-1)u(t-1)\}$ 所生成的 σ-代数，设

$$S(t,\beta)=\sum_{k=1}^{t}|\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}|^{2}+1=\sum_{k=1}^{t}\beta^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta+1.$$

首先证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}c^{\mathrm{T}}(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta/s(k,\beta)$$

以概率 1 收敛. 事实上，设

$$Z(t,\beta)=\sum_{k=1}^{t}e^{\mathrm{T}}(k)\Phi^{\mathrm{T}}(k)\beta/s(k,\beta);Z(0,\beta)=0,$$

则由条件(7.2.5)，(7.2.7)知，对任何 β，$Z(t,\beta)\in\mathscr{F}_t$，且

$$E(e(t)^{\mathrm{T}}\Phi(t)^{\mathrm{T}}\beta/s(t,\beta)|\mathscr{F}_t)=0,$$

于是

$$E(Z(t+1),\beta)/\mathscr{F}_t)=Z(t,\beta),$$

即$\{Z(t,\beta),\mathscr{F}_t)\}$是鞅列．此外，由条件(7.2.6)式得

$$EZ^2(N,\beta)=E(\sum_{k=1}^{N}E\{Z^2(k,\beta)-Z^2(k-1,\beta)/\mathscr{F}_k\})$$

$$=E\sum_{k=1}^{N}E\{(Z(k+1,\beta)-Z(k,\beta))^2|\mathscr{F}_k\}$$

$$\leqslant \mathrm{CE}\sum_{k=1}^{N}(s(k,\beta)-s(k-1,\beta))/s(k,\beta)$$

$$\cdot S(k-1,\beta))<C.$$

因此由 Schwartg 不等式，得

$$\sup_{N\geqslant 1}|E|Z(N,\beta)|<\infty,$$

即$\{Z(t,\beta),\mathscr{F}_t\}$为 L_1 有界鞅，从而 $Z(t,\beta)$依概率 1 收敛[30]，因此级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{\mathrm{T}}(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta/s(k,\beta)$$

以概率 1 收敛．

下面证明(7.2.8)式成立．用反证法．若

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}|\Phi^{t}(k)\bar{\beta}|^2=\infty \quad (\text{p-a.s.}),$$

则 $\quad s(N,\bar{\beta})\to+\infty(N\to\infty)(\text{p-a.s.}),$

于是由引理 7.1.3 得

$$\frac{1}{S(N,\beta)}\sum_{k=1}^{N}e(k)^{\mathrm{T}}\Phi(k)^{\mathrm{T}}\bar{\beta}\to 0(N\to\infty)(\text{p-a.s.}), \tag{7.2.9}$$

设 $\quad y(k)=\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta_0+e(k)$，则

$$NV(\beta_{0N})=\sum_{k=1}^{N}|y(k)-\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta_0|^2=\sum_{k=1}^{n}|e(k)|^2, \tag{7.2.10}$$

$$NV(\hat{\beta}_N)=\sum_{k=1}^{n}|y(k)-\Phi(k)^{\mathrm{T}}\hat{\beta}_N|^2=\sum_{k=1}^{n}|e(k)-\Phi(k)^{\mathrm{T}}\bar{\beta}|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |e(k)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} e(k)^{\mathrm{T}}\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta} + \sum_{k=1}^{n} |\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |e(k)|^2 + S(N,\tilde{\beta})$$

$$\cdot \left[-\frac{2}{S(N,\tilde{\beta})}\sum_{k=1}^{n} e(k)^{\mathrm{T}}\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta} + 1 - \frac{2}{S(N,\tilde{\beta})}\right],$$

故由(7.2.9)式及(7.2.10)式，得

$$NV(\hat{\beta}_N) - NV(\beta_{0N}) = NV(\hat{\beta}_N) - \sum_{k=1}^{n} |e(k)|^2 \to \infty.$$

此与 $\hat{\beta}_N$ 是 β 的最小二乘估计矛盾，因此有

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}|^2 < +\infty \text{(p-a.s.)}.$$

定理 7.2.2 若系统(7.2.3)除满足定理 7.2.1 的条件外，还满足

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left\{\sum_{k=1}^{N}(|y(k)|^2 + |u(k)|^2)\right\} < \infty \quad \text{(p-a.s.)}, \quad (7.2.11)$$

则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta^*|^2 = 0 \quad \text{(p-a.s.)},$$

其中 $\beta^* = \dfrac{\tilde{\beta}}{1+|\tilde{\beta}|}$，$\tilde{\beta} = \hat{\beta}_N - \beta_0$。

证 若 $\tilde{S}(N,\beta) = \max\{S(N,\beta), N\}$，

$$\tilde{Z}(t,\beta) = \sum_{k=1}^{t} e^{\mathrm{T}}(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta / \tilde{S}(k,\beta); \tilde{Z}(0,\beta) = 0,$$

则 $\{\tilde{Z}(t,\beta), \mathscr{F}_t\}$ 为 L_1 有界鞅，且 $\tilde{S}(N,\beta) \to \infty (N\to\infty)$，故由引理 7.1.3 知，对一切 β，有

$$\frac{1}{\tilde{S}(N,\beta)} \sum_{k=1}^{N} e^{\mathrm{T}}(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta \to 0 (N\to\infty) \quad \text{(p-a.s.)}, \quad (7.2.12)$$

由条件(7.2.11)式得 $\overline{\lim_{N\to\infty}} \tilde{S}(N,\beta)/N < \infty$ (p-a.s.)，故由(7.1.12)式，得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{\mathrm{T}}(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta\to 0(N\to\infty)\quad(\text{p-a.s.}),\tag{7.2.13}$$

设 $y(t)=\Phi(t)^{\mathrm{T}}\beta_0+e(t),\tilde{\beta}=\beta-\beta_0$,代入(7.2.4)式得

$$NV(\beta)=\sum_{k=1}^{N}|e(t)-\Phi(t)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{N}(|e(t)|^2-\tilde{\beta}^{\mathrm{T}}\Phi(k)e(k)-e(k)^{\mathrm{T}}\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}+\tilde{\beta}^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi(k)^{T}\tilde{\beta}).$$

由上式可见,估计 $\hat{\beta}_N=\beta_0+\tilde{\beta}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{N}\tilde{\beta}^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{N}e(k)^{\mathrm{T}}\Phi(k)^{\mathrm{T}},$$

故由(7.2.13)式,得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\Phi(k)^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}|^2\to 0(N\to\infty)(\text{p-a.s.}).\tag{7.2.14}$$

用 $\frac{1}{(1+|\tilde{\beta}|)^2}$ 乘(7.2.14)式,并记 $8\beta^*=\frac{\tilde{\beta}}{1+|\tilde{\beta}|}$,便得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\Phi(k)\beta^*|^2=0\quad(\text{p-a.s.}).$$

推论 7.2.1 若 $A=\{\beta\,|\,|\beta|\leqslant|,\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}|\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta|=0\}=\{0\}$(p-a.s.),则估计 $\hat{\beta}_N$ 是相容的.

证 设 $\hat{\beta}_N$ 是 β 的最小二乘估计,β_0 为参数矢量的真估,$\tilde{\beta}_N\hat{\beta}_N-\beta_0$,$\beta_N^*=\frac{\tilde{\beta}_N}{1+|\tilde{\beta}_N|}$,则由定理 7.2.2,得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\Phi(k)^{\mathrm{T}}\beta_N^*=0.$$

设 β^* 为 $\{\beta_N^*\}$ 和闭包点,则 $\beta^*\in A$,又因 $A=\{0\}$,故 $\beta^*=0$,即

$$\hat{\beta}_N\to\beta_0(N\to\infty)(\text{p-a.s.}).$$ #

§3 参数为随机矢量时的估计及其相容性

前面讨论的参数估计，都是把参数视为常量．在许多情形下，参数是一个随机变量．本节在假定参数为二阶矩有限的随机矢量条件下，讨论它的最小方差估计性质，进一步在假定参数为 Gauss 随机矢量的条件下，用 Kalmsn 滤波的方法，给出了估计量的迭代公式，并讨论它的相容条件．

仍考虑线性系统(7.2.1)，其中 $A_k, B_j (k=1,2,\cdots,p, j=1,2,\cdots,q)$ 分别由 $n\times n$ 个及 $n\times m$ 个与 $\{e(k)\}_{k\geq 1}$ 独立且二阶矩有限的随机变量所组成的矩阵．记

$$\theta^{T}=[A_1A_2\cdots A_pB_1B_2\cdots B_q], \quad X=\mathrm{Col}\theta, \tag{7.3.1}$$

则方程(7.3.1)可写为

$$y(t)=\Phi(t)^{T}x+e(t).$$

设 $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一阶矩为零，二阶矩有限的随机变量全体，对任何 $\zeta\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，令

$$\|\zeta\|^2=E|\zeta|^2.$$

若 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^{T}, \zeta_i\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\|\zeta\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\zeta_i\|^2.$$

在方程(7.3.1)中，使

$$V_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|y(k)-\Phi(k)^{T}x\|^2 \tag{7.3.2}$$

达到最小值的估计量 $\hat{x}(N)$ 称为参数 x 的最小方差估计．

先求随机变量 $\zeta\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的最小方差估计．设 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$ 是由 $\{y_0,y_1,\cdots,y_{t-1},u_0,u_1,\cdots,u_{t-1}\}$ 所生成的 σ-代数，$P_{\mathscr{F}_t}$ 是 P 在 $\mathscr{F}_t$ 上的限制，则 $L_2(\Omega,\mathscr{F}_t,P_{\mathscr{F}_t})$ 是 $L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的闭子空间，由投影定理知，对任何 $\zeta\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，存在唯一元素 $\hat{\zeta}(t)\in L_2(\Omega,\mathscr{F}_t,P_{\mathscr{F}_t})$，使

$$\| \zeta-\hat{\zeta}(t) \| =\inf \| \zeta-\eta \| \eta\in L_2(\eta,\mathscr{F}_t,P_{\mathscr{F}_t}),$$

且 $\hat{\zeta}(t)$是方程$\langle\hat{\zeta}(t),\eta\rangle=(\zeta,\eta)\forall\ \eta\in L_2(\eta,\mathscr{F}_t,P_{\mathscr{F}_t})$的解．

$\hat{\zeta}(t)$就是 ζ 的最小方差估计．由条件期望的性质知，$\hat{\zeta}(t)$是 ζ 在给定 $\mathscr{F}_t$ 下的条件期望，即

$$\hat{\zeta}(t)=E(\zeta|\mathscr{F}_t).$$

由此得到(7.3.1)式中 $x(N)$的最小方差估计为

$$\hat{x}(N)=(\hat{x}(N),\cdots,\hat{x}_{n(np+mq)}(N))^{\mathrm{T}}=E(x(N))|\mathscr{F}_N).$$

现讨论估计量 $\hat{x}(N)$的收敛性．

定理 7.3.1 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}},x_i\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)(i=1,2,\cdots,m),\hat{x}(N)=(\hat{x}_1(N),\cdots,\hat{x}_m(N))^{\mathrm{T}}=E(x|\mathscr{F}_N)$,

$$P(N)=E\{(x-\hat{x}(N))(x-\hat{x}(N))^{\mathrm{T}}|\mathscr{F}_N\};\mathscr{F}_\infty\sigma$$
$$=(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{F}k),$$

$\hat{x}(\infty)=E(x|\mathscr{F}_\infty);P(\infty)=E\{(x-\hat{x}(\infty))(x-\hat{x}(\infty))^{\mathrm{T}}|\mathscr{F}_\infty\}$,

则

$$\hat{x}(N)\xrightarrow{(\text{p-a.s.})}\hat{x}(\infty)(N\to\infty);P(N)\xrightarrow{(\text{p-a.s.})}P(\infty)(N\to\infty).$$

证 先证 $\hat{x}(N)$的收敛性．显然，只要考虑 x 是随机变量的情形已足够．由例 4.1.1 知，$\{\hat{x}(N),\mathscr{F}_N\}$为鞅，又因 $x\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，故由 Le'vy 定理[30]知

$$\hat{x}(N)\xrightarrow{(\text{p-a.s.})}\hat{x}(\infty)\quad(N\to\infty).$$

为了证明 $P(N)$的收敛性，可考虑 $P(N)$中每个元素的收敛性．记

$$P_{ij}(N)=E(x_i-\hat{x}_i(N))(x_j-\hat{x}_j(N))$$
$$+E(x_ix_j|\mathscr{F}_N)-\hat{x}_i(N)\hat{x}_j(N),$$

因为 $\hat{x}_i(N)\hat{x}_j(N)\xrightarrow{(\text{p-a.s.})}\hat{x}_i(\infty)\hat{x}_j(\infty),E(x_ix_j|\mathscr{F}_N)\xrightarrow{(\text{p-a.s.})}E(x_ix_j|\mathscr{F}_\infty)$,

故 $$P_{ij}(N)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}P_{ij}(\infty)\quad(N\to\infty),$$

从而 $$P(N)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}P(\infty)\quad(N\to\infty).$$

下面讨论估计量强相容的条件.

定理 7.3.2 在定理 7.3.1 的假设下,记

$$A=\{\omega|P(\omega)=0\},$$

设 I_A 为定义在 A 上的特征函数,则

$$I_A\hat{x}(\infty)=I_Ax(\text{p-a.s.}).$$

若 $P(A)=1$,则 $\hat{x}(N)$ 为 x 的强相容估计.

证 不妨设 x 为随机变量. 因为 $A\in\mathscr{F}_\infty$,故由鞅的收敛性得

$$E(I_A|\mathscr{F}_N)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}E(I_A|\mathscr{F}_\infty)=I_A,\tag{7.3.3}$$

$$\begin{aligned}&0\leqslant E(I_A|\mathscr{F}_N)^2P(N)\\&=E(I_A|\mathscr{F}_N)^2E(x^2(\mathscr{F}_N)-E(I_A|\mathscr{F}_N)^2\hat{x}^2(N).\end{aligned}$$

由于上式右边的每一项均小于 $E(x^2|\mathscr{F}_t)$,因此由鞅论知,它们是一致可积的,从而以概率 1 收敛. 于是有

$$E(I_A|\mathscr{F}_N)^2P(N)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}I_AP(\infty)=0\quad(N\to\infty),\tag{7.3.4}$$

$$E\{(E(I_A|\mathscr{F}_N)(x-\hat{x}(N)))^2\}\to0\quad(N\to\infty),$$

由此得出 $$E(I_A|\mathscr{F}_N)(x-\hat{x}(N))\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}0\quad(\mathrm{N}\to\infty),$$

又由(7.3.3)式得

$$E(I_A|\mathscr{F}_N)(x-\hat{x}(N))\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}I_A(x-\hat{x}(\infty))\quad(N\to\infty),$$

故由极限的唯一性得

$$I_A(x-\hat{x}(\infty))=0,$$

即 $I_A\hat{x}(\infty))=I_Ax(\text{p-a.s.})$. 若 $P(A)=1$,便有

$$\hat{x}(\infty)=x(\text{p-a.s.}).$$

又由定理 7.3.1 知

$$\hat{x}(N)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}\hat{x}(\infty)\quad(N\to\infty).$$

故 $$\hat{x}(N) \xrightarrow{(\text{p-a.s.})} x \quad (N \to \infty). \qquad \#$$

定理 7.3.2 说明，估计量的相容性，由事件 A 的性质决定．为了研究 A，必须求出条件期望 $\hat{x}(k)$ 与协方差矩阵 $P(k)$ 的递推公式．在一般情形下，这是很困难的，但若随机矢量服从 Gauss 分布，则可用 Kalman 滤波的方法获得关于 $\hat{x}(k)$，$P(k)$ 的递推公式，这就是下面的定理．

定理 7.3.3 设有多维线性离散系统

$$y(t) = \Phi(t)^{\mathrm{T}} x + e(t). \tag{7.3.5}$$

$y(\cdot)$，$\Phi(\cdot)$ 的意义如(7.2.3)式，设 $\{e(t)\}_{t\geqslant 1}$ 是独立同分布的 Gauss 矢量列，且 $Ee(t)=0$，$Ee(t)e(t)^{\mathrm{T}}=R>0$. 设 x 为与 $e(t)$ 独立的 Gauss 列，且假设先验均值 Ex 与协方差矩阵 $P(0)$ 分别为 μ 及 Λ，则 $\hat{x}(t)$ 与 $P(t)$ 满足如下差分方程

$$\begin{cases}\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t) + k(t)(y(t) - \Phi(t)^{\mathrm{T}}\hat{x}(t))(t \geqslant 0); \\ \hat{x}(0) = Ex = \mu;\end{cases} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{cases}P(t) = P(t-1) - k(t-1)\Phi(t-1)^{\mathrm{T}}P(t-1)(t \geqslant 1), \\ P(0) = \Lambda,\end{cases} \tag{7.3.7}$$

其中 $$K(t) = P(t)\Phi(t)(k + \Phi(t)^{\mathrm{T}}P(t)\Phi(t))^{\mathrm{T}}. \tag{7.3.8}$$

证 见文献[6].

现在讨论 A 的特征及强相容估计的充要条件．

引理 7.3.1 设 $\{P(t)\}$ 为一列正定矩阵，且

$$P(t) \longrightarrow P(\infty), P(t) - P(\infty) \geqslant 0,$$

则 $$P(\infty) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} a^{\mathrm{T}}P(t)^{\mathrm{T}}a = +\infty,$$

其中，a 为任意非零常数矢量．

证 $\Rightarrow$ 设 $P(\infty)=0$，则当 $t\to\infty$，$P(t)$ 的所有特征值趋于零．设 λ_t 是 $P(t)^{-1}$ 的最小特征值，则 $\lambda_t \to \infty$，于是对任何非零矢量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}\boldsymbol{a} \geqslant \lambda_t \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}a = \lambda_t |a|^2 \to +\infty (t \to \infty).$$

$\Leftarrow$ 用反证法．设 $P(\infty)\neq 0$. 不妨设 $P(\infty)$ 为对角线矩阵：

$$P(\infty)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

设
$$P_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}>0.$$

则因为 $P(t)\geqslant P(\infty)\geqslant P_1$，故有 $P(t)-P_1\geqslant 0$.

设
$$P(t)-P_1=\left[\begin{array}{c:cc}a_{11} & a_{12} & \cdots\\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}a_{11} & a_{12}\\ \hdashline \vdots & P_2\end{array}\right]\geqslant 0.$$

则
$$P(t)=\left[\begin{array}{c:c}\lambda_1+a_{11} & \cdots\\ \hdashline \vdots & P_2\end{array}\right].$$

于是得行列式 $|P(t)|$ 的值为

$$|P(t)|=\lambda_1|P_2|+|P(t)-P_1|\geqslant\lambda_1|P_2|>0.$$

设 $P(t)^{-1}$ 的第一行第一列元素为 $(P(t)^{-1})_{11}$，则

$$(P(t)^{-1})_{11}=\frac{|P_2|}{|P(t)|}\leqslant\frac{|P_2|}{\lambda_1|P_2|}=\frac{1}{\lambda_1},$$

取 $\boldsymbol{a}=[1,0,\cdots]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}\boldsymbol{a}=(P(t)_{-1})^{11}\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\not\to\infty,\text{矛盾}.$$ #

定理 7.3.4 在定理 7.3.3 的条件下，若 $P(0)=\Lambda>0$，

则 $A=\{\omega|P(\infty)=0\}=\{\omega|\ \sum_{t=1}^{\infty}|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(t)|^2=\infty,\forall\ \boldsymbol{a}\neq 0\}$.

证 首先注意

$$\{\omega|P(\infty)=0\}=\{\omega|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}\boldsymbol{a}\to+\infty(t\to\infty),\forall\ \boldsymbol{a}\neq 0\}. \tag{7.3.9}$$

事实上，由(7.3.7)式及 $P(0)=\Lambda>0$，得

$$P(t)-P(t-1)<0.$$

又由定理 7.3.1 知，$P(t)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}P(\infty)(t\to\infty)$，故有

$$P(t)>P(t+1)\geqslant P(\infty)=0.$$

从而有 $P(t)>0, P(t)-P(\infty)\geqslant 0$,

由引理 7.3.1 便得(7.3.9)式成立.

故只要证明

$$\lim_{t\to\infty} a^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}a=+\infty \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{\infty}[a^{\mathrm{T}}\varphi(t)]^2=+\infty, \forall\ a\neq 0. \tag{7.3.10}$$

利用矩阵的恒等变换.

$$(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(C^{-1}+DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1},$$

(7.3.7)式可写为

$$\begin{aligned}P(t)^{-1}&=P(t-1)^{-1}+\Phi(t)R^{-1}\Phi(t)^{\mathrm{T}}\\&=P(0)^{-1}+\sum_{k=1}^{t}\Phi(k)R^{-1}\Phi(k)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

因为 R 为正定矩阵,故存在正数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,使

$$\varepsilon_1 I\leqslant R^{-1}\leqslant \varepsilon_2 I, \tag{7.3.12}$$

由公式(7.3.11)知,对任何矢量 $a^{\mathrm{T}}=[a_1^{\mathrm{T}}\cdots a_n^{\mathrm{T}}]$,有

$$a^{\mathrm{T}}(P(t)^{-1}-P(0)^{-1})a=\sum_{k=1}^{t}a^{\mathrm{T}}\Phi(k)R^{-1}\varphi(t)^{\mathrm{T}}a,$$

由不等式(7.3.12),得

$$\begin{aligned}\varepsilon_1\sum_{k=1}^{t}a^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi^{\mathrm{T}}(k)a&\leqslant a^{\mathrm{T}}(P(t)^{-1}-P(0)^{-1})a\\&\leqslant \varepsilon_2\sum_{k=1}^{t}a^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi^{\mathrm{T}}(k)a,\end{aligned} \tag{7.3.13}$$

注意到

$$\Phi(k)=\begin{bmatrix}\varphi(k) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(k)\end{bmatrix},$$

$$a^{\mathrm{T}}\Phi(k)\Phi(k)^{\mathrm{T}}a=\begin{bmatrix}a_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ a_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\varphi(k) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(k)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi^{\mathrm{T}}(k) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi^{\mathrm{T}}(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_j^{\mathrm{T}}\varphi(k)\varphi^{\mathrm{T}}(k)a_j=|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2,$$

代人不等式(7.3.13)，得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(0)^{-1}\boldsymbol{a}+\varepsilon_1\sum_{k=1}^{t}|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2\leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}\boldsymbol{a}$$

$$\leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(0)^{-1}\boldsymbol{a}+\varepsilon_2\sum_{k=1}^{t}|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2.$$

由于 $P(0)^{-1}$ 为正定的，于是得到

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}P(t)^{-1}\boldsymbol{a}\to+\infty(t\to\infty)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2=+\infty.$$

由定理 7.3.2 与定理 7.3.4 可得出如下推论．

推论 7.3.1 若 x 满足定理 7.3.3 的条件，且

$$P\{\omega|\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2=\infty\}=1, \tag{7.3.14}$$

则估计 $\hat{x}(t)$ 为强相容的．

下面的定理将进一步指出，在定理 7.3.3 的条件下，条件(7.3.14)式也是使估计量 $\hat{x}(t)$ 强相容的必要条件．

定理 7.3.5 在定理 7.3.3 的条件下，若 $\hat{x}(t)$ 强相容，则对任何非零矢量 a，$\sum_{k=1}^{\infty}|a^{\mathrm{T}}\varphi(k)|^2=\infty$.

证 由定理 7.3.2 及 7.3.4，我们只要证明

$$P\{\omega|P(\infty)\neq0,\hat{x}(\infty)\}=0.$$

为简单起见，只考虑 x 为随机变量的情形．设

$$A=\{\omega|P(\infty)=0\},\quad A_r=\{\omega|P(\infty)<r\},$$

由于 x 服从 Gauss 分布，故在给定 $\mathscr{F}_t$ 下，x 的条件分布也服从 Gauss 分布，其均值为 $\hat{x}(t)$，方差为 $P(t)$，因此，

$$P(|x-\hat{x}(t)|<\varepsilon|\mathscr{F}_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi P(t)}}\int_{-}^{\varepsilon}\varepsilon e-y^2/2P(t)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\begin{cases}1, & 若\ \omega\in Ar;\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi r}}\varepsilon, & 若\ \omega\in Ar.\end{cases}$$

从而 $$P(|x-\hat{x}(t)|<\varepsilon)\leqslant P(A_r)+\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\varepsilon.$$

另一方面，因为 $\hat{x}(t)\xrightarrow{\text{(p-a.s.)}}\hat{x}(\infty)(t\to\infty)$，故由 Egorov 定理，$\forall\ \delta>0$，存在 B，使 $P(B)>1-\delta$，而 $\hat{x}(t)$ 在 B 上一致收敛于 $\hat{x}(\infty)$，故存在 $T(\varepsilon)$，使当 $t>T(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{\omega\in B}|\hat{x}(t)-\hat{x}(\infty)|<\varepsilon/2,$$

因此 $P(\hat{x}(\infty)=x)\leqslant P(|\hat{x}(\infty)-x|<\frac{\varepsilon}{2})$

$$\leqslant P\{(\hat{x}(\infty)-x|<\frac{\varepsilon}{2}\cap B\}+\delta$$

$$\leqslant P\{|\hat{x}(t)-x|<\varepsilon\}+\delta$$

$$<\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon}{\sqrt{\pi r}}+P(Ar)+\delta.$$

对任何 $\delta>0$，取 r 使 $P(Ar)<P(A)+\delta$，并使 $\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\varepsilon<\delta$，则

$$P(\hat{x}(\infty)=x)\leqslant P(A)+3\delta,$$

由于 δ 可任意小，故有

$$P(\hat{x}(\infty)=x)\leqslant P(A)=P(\omega|P(\infty)=0\},$$

从而，由定理 7.3.2 得到

$$0\leqslant P(\hat{x}(\infty)=x,P(\infty)\neq 0)=P(\hat{x}(\infty)=x)-P(\hat{x}(\infty)$$
$$=x,P(\infty)=0$$
$$=P(\hat{x}(\infty)=x)-P(P(\infty)=0)\leqslant 0,$$

$$\Rightarrow\quad P(\hat{x}(\infty)=x,P(\infty)\neq 0)=0.$$

参考文献

1 Billingsley P. Probability and Measure. New York:John Wiley & Sons. 1986

2 Chow Y S,et. Probability Theory. New York: Berlin Springer-Verlag. 1978

3 Doob J L. Notes on Martingale Theory. Fourth Berkeley Symposium, V. I ,1960

4 Holley R A,et. A Martingale Approach to Infinite System of Interacting Processes. Annals of Prob. 4(1976).

5 Gihman I , et. The Theory of Stochastic Processes I . New York; Berlin Springer-Verlag. 1979.

6 Ikeda N, et. Stochastic Differential Eguations and Diffusion Processes. North-Holland Math. Library. 1981

7 Irle A. Monotone Stopping Problems and Continous Time Processes Pitman Pu6. 1977

8 Ladde G S. Generated by Ito-and Mcshane-Calculus. S. A. A, V. S 1987

9 Lehman E L. Testing Statistics Hypothesis. New York:John Wiley. 1986

10 Liptzer R. S. et. Staistics of Random Processes I. New York: Berlin, Spriner-Verlag. 1977

11 Metivier M. Semimartingales. Berlin, Walter de Gruyter. 1982

12 Shivyayev A. N Optimal Stopping Rules. New York: Berlin, Springer-Verlag. 1977

13 Siegmund D. O. Some Problems in the Theory of Optimal Stopping Rules. Am Math Stat. 38(1967)

14 王梓坤．随机过程论．北京:科学出版社,1978

15 江泽坚著．实变函数论．北京:人民教育出版社,1961

16 吉田耕作著．泛函分析．北京:人民教育出版社,1981

17 严加安．鞅与随机积分．上海:科技出版社,1981

18 Ladde G S, Hu Bijin(胡必锦) O.-U. Operator an Wienner functionals

generated by Ito-and Mcshane-Calculus stochastic Analysis and App lications 5(1) 1987 pp27－51

19 胡必绵．S-型随机微分方程．武汉:华中理工大学学报,Vol. 173(1989)

20 胡必锦．随机过程连续的 Kolmogorov 条件．武汉:应用数学,第三期,1989

21 胡必锦等．一类不为鞅的张量值过程．武汉:应用数学(增刊),Vol. 6,1993

22 Hu Bijin. Critical Stopping and Semimartingeles of stochastic Processes D. S. A. 3(1993)

23 胡必锦. 逆 π-Bayes 决策．武汉:数学物理学报,16,1996

24 胡必锦. 论 Wald 猜测,Vol. 10,1997

25 胡必锦. 半鞅序列理论及应用．武汉:华中理工大学出版社,1997

26 Doob J L. What is a Maringale? American Math. Monthly,(78)1971

27 Shiryayev A N. Probebilitg. Springer-Verlag New York:Inc. 1984

28 Ljung L. Consistency of the Least-Squares Identification Method. IEEE Trans. Automat. Comtr. 1976, Vol AC-21,779～781

[General Information]
□□=□□□□□□□
□□=
□□=179
SS□=0
□□□□=
Vss□=75536773